مفهوم حد :

تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم که این تابع در $x=1$ تعریف نمی‌شود

اما می‌خواهیم بدانیم در حوالی $x=1$ چه رفتاری از خود نشان می‌دهد برای این کار با توجه

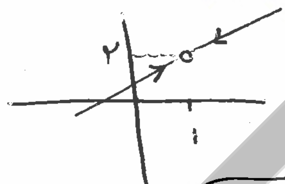
با جدول زیر و با دادن مقادیر مختلف به x ، به نقطه $x=1$ نزدیک می‌شویم و مقادیر تابع

f را محاسبه می‌کنیم.

x	۰٫۹	۰٫۹۹	۰٫۹۹۹	۱	۱٫۰۰۱	۱٫۰۱	۱٫۱
$f(x)$	۱٫۹	۱٫۹۹	۱٫۹۹۹	ت ن	۲٫۰۰۱	۲٫۰۱	۲٫۱

اگر مقادیر x به عدد یک نزدیک و نزدیک‌تر شوند مقدار تابع به عدد ۲ نزدیک می‌شود

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=x+1 \quad (x\neq 1)$$

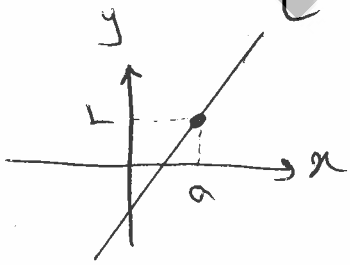


$$\lim_{x\to 1} f(x)=2$$

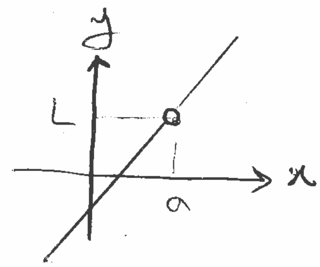
$$\begin{cases} \lim_{x\to 1^+} f(x)=2 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=2 \end{cases}$$

برای محاسبه حد تابع f در $x=a$ مقدار تابع در این نقطه مهم نیست برای مثال در تابع

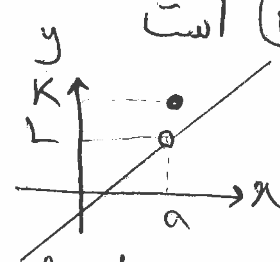
$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ با این که تابع در $x=1$ تعریف نمی‌شود اما حد تابع در $x=1$ موجود و برابر ۲ است



$$\begin{cases} \lim_{x\to a} f(x)=L \\ f(a)=L \end{cases}$$



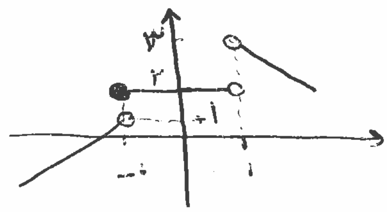
$$\begin{cases} \lim_{x\to a} f(x)=L \\ f(a) \text{ تعریف نمی‌شود} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \lim_{x\to a} f(x)=L \\ f(a)=K \end{cases}$$

باتوجه به شکل تابع حاصل $\lim_{x\to 1^+} f(x) - \lim_{x\to (-1)^-} f(x)$ کدام است؟

۲	۱
-۲	-۱



$۳-۱=\boxed{۲}$

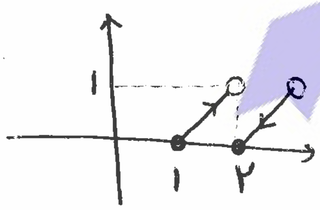
حد توابع $f(x)=x-[x]$ و $g(x)=\sqrt{x-۲}$ در $x=۲$ بررسی کنید

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = ۲^+ - [۲^+] = ۲^+ - ۲ = ۰$$

$\neq$ حد ندارد

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = ۲^- - [۲^-] = ۱$$

بررسی از روی شکل:



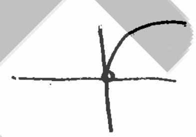
حدهای چپ و راست موجود ولی نابرابر هستند لذا $f(x)$ در $x=۲$ حد ندارد

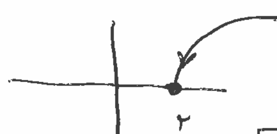
$g(x)=\sqrt{x-۲}$ $\qquad D_g \to x-۲\geq ۰ \longrightarrow x\geq ۲$

$x=۲$ در $g(x)$ لذا ۲^- داخل دامنه نیست ولی ۲^+ داخل دامنه می‌باشد $\longleftarrow [۲, +\infty)$

حد ندارد.

از لحاظ ترسیم:





$$\lim_{x\to ۲^+} g(x) = ۰$$

$$\lim_{x\to ۲^-} g(x) = \text{وجود ندارد}$$

بررسی انواع حد:

① توابع شامل رادیکال: در این توابع دامنه محاسبه می‌شود و با توجه به دامنه می‌توان موجود بودن یا نبودن تابع را محاسبه کرد.

مثال: حد توابع $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$ و $g(x)=\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+1}$ در $x=1$ کدام است؟

$f(x) = \underset{\mathbb{R}}{x} + \underset{}{\sqrt{x^2-1}}$

$x^2-1 \geq 0 \longrightarrow x^2 \geq 1 \longrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \text{یا} \\ x \leq -1 \end{cases}$ $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

۱ داخل دامنه نیست لذا حد ندارد

$g(x) = \dfrac{x-\sqrt{x}}{x+1}$ $\quad x \geq 0$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{x+1} = \dfrac{1-\sqrt{1}}{1+1} = \dfrac{0}{2} = 0$ ✓

② توابع دو ضابطه‌ای:

$f(x) = \begin{cases} g(x) & x>a \longrightarrow a^+ \\ h(x) & x<a \longrightarrow a^- \end{cases}$

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x>2 \\ ax-[x] & x<2 \end{cases}$ در $x=2$ حد دارد. a کدام است؟

$\begin{array}{c|c} 3 & 2 \\ \hline -3 & -2 \end{array}$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = (2^+)^2+1 = 5 \quad \Longrightarrow \quad 2a-1 = 5 \longrightarrow 2a = 6 \longrightarrow \boxed{a=3}$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = a(2) - [2^-] = 2a-1$

تست

الف) حاصل $A = \lim\limits_{x\to 2} f(x) + \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x)$ اگر $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \notin \mathbb{Z} \\ 1 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ کدام است؟

$\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ \hline 4 & 3 \end{array}$

$2(2)-1 + 2(\frac{1}{2})-1 = 3+0 = 3$

$x \to 2 \neq x = 2$

$x \to 2$ یعنی عددی از ۲ بیشتر یا کمتر که عددی

اعشاری می‌شود که اعشار اعداد صحیح نخواهد بود بر همین دلیل

از ضابطه بالایی $f(x)$ استفاده کردیم.

توابع شامل جزء صحیح: ابتدا مقدار جزء صحیح را در نقطه راست و چپ خواسته شده

محاسبه می‌کنیم سپس جزء صحیح حذف و جواب آن را قرار می‌دهیم و در ادامه به حل

حد می‌پردازیم. یعنی ابتدا تکلیف جزء صحیح را روشن می‌کنیم.

مثال $\lim\limits_{x \to 2} [-x] \longrightarrow$

$$\lim_{x \to (2)^+} [-x] = [-(\underset{2,1}{2^+})] = [-2,1] = -3$$

$$\lim_{x \to (2)^-} [-x] = [-(\underset{1,9}{2^-})] = [-1,9] = -2$$

تابع در $x = 2$ حد ندارد

مثال: اختلاف حد چپ و راست تابع $f(x) = 2x + [\frac{x}{2}]$ در $x = 2$ کدام است؟

① ۳   ۲ ۰

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2x + [\frac{2^+}{2}] = 2x + [1^+] = 2x + 1 = 5$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2x + [\frac{2^-}{2}] = 2x + [1^-] = 2x = 4$$

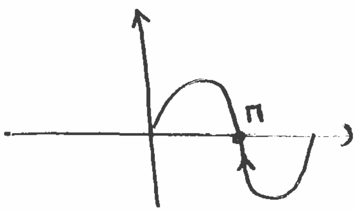
$5 - 4 = 1$

نکته: در تابع $y = [ax]$ در نقاط صحیح کننده داخل جزء صحیح $(ax \in Z)$ تابع حد ندارد

حد توابع مثلثاتی داخل جزء صحیح:

$$\lim_{x\to\pi^+}[\sin x] =$$

چون حد عبارت داخل جزء صحیح وقتی $x\to\pi^+$ برابر با صفر است باید بررسی کنیم که در داخل جزء صحیح 0^+ داریم یا 0^-. با توجه به نمودار $y=\sin x$ وقتی $x\to\pi^+$، تابع f با مقادیر کمتر از صفر به صفر نزدیک می‌شود لذا



$$\lim_{x\to\pi^+}[\sin x] = [0^-] = -1$$

حد توابع مرکب:

اگر بخواهیم حد تابع مرکب fog را در $x=a$ محاسبه کنیم اول باید حد تابع g را بیابیم. فرض می‌کنیم حاصل این حد برابر L باشد حالا برای محاسبه حد تابع $f(g(x))$ معمولاً باید بررسی کنیم که g با مقادیر بیشتر از L به L نزدیک می‌شود یا کمتر از آن (L^+ است یا L^-) در پایان حد f را وقتی $x\to L^+$ یا $x\to L^-$ محاسبه می‌کنیم.

مثال مهم: اگر $f(x)=\cos x$ و $g(x)=\left[\frac{1}{x}\right]$ حاصل $\lim_{x\to\pi} gof(x)$ کدام است؟

-1	-2
$-\frac{1}{2}$	موجود نیست

$$\lim_{x\to\pi} f(x) = \lim_{x\to\pi}\cos x = -1$$

حال باید تعیین شود که تابع f با مقادیر بیشتر از ۱- به ۱- نزدیک می‌شود یا کمتر از آن.

$-1\le\cos x\le 1$ است لذا $\cos x$ هیچ‌گاه کمتر از ۱- نمی‌شود در نتیجه $\cos x\to(-1)^+$

$$\lim_{x\to\pi} g(f(x)) = \lim_{x\to(-1)^+} g(x) = \lim_{x\to(-1)^+}\left[\frac{1}{x}\right] = \left[\frac{1}{-\frac{1}{2}}\right] = [-2] = \boxed{-2}$$

۰/۵-

(نکته مهم: اگر تابع f در $x=a$ حد داشته باشد و تابع g در $x=a$ حد نداشته باشد آن‌گاه حد توابع $f \pm g$ و $\frac{g}{f}$ در $x=a$ موجود نیست.)

بعنوان مثال $f(x)=x$ در $x=1$ حد دارد ولی تابع $g(x)=[x]$ در این نقطه حد ندارد، لذا $f(x)+g(x)$ در $x=1$ حد ندارد.

$$\lim_{x\to 1}(x+[x]) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+}(x+[x]) = 1+[1^+] = 2 \\ \neq \\ \lim\limits_{x\to 1^-}(x+[x]) = 1+[1^-] = 1 \end{cases}$$

محاسبه حد در حالت $\frac{0}{0}$:

① حذف عامل صفرشونده: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{x\cancel{(x-2)}} = \frac{4}{2} = 2$

با استفاده از اتحادها عبارت را تجزیه می‌کنیم و عامل صفرکننده صورت و مخرج حذف می‌گردد.

نکته مهم: در محاسبه حد، اگر در تابع قدرمطلق یا جزء صحیح وجود داشت ابتدا باید قدرمطلق را تعیین علامت کنیم بدین صورت که یا خود عبارت بیرون بیاید یا خود عبارت x ⊖، و جزء صحیح را با تعیین مقدار حذف می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2[x]-8}{x^2-2x}$$

تکلیف جزء صحیح مشخص شود $\longrightarrow$ $[2^+]=2$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^+}\frac{2x^2-8}{x^2-2x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 2^+}\frac{2(x^2-4)}{x(x-2)} = \frac{2\cancel{(x-2)}(x+2)}{x\cancel{(x-2)}}$$

$$= \frac{2(4)}{2} = \boxed{4}$$

در مسائل حد دو نوع صفر داریم :

① صفر مطلق که دقیقاً برابر با صفر است مانند: $۲-۲=۰$

② صفر حدی که خیلی نزدیک به صفر است ولی به هر حال خود صفر نیست.

در ریاضی به $\frac{0}{0}$ حالت مبهم می گوئیم منظور همان $\frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر حدی}}$ می باشد. هرگاه صورت یا مخرج کسر صفر مطلق ظاهر شود تکلیف حد مشخص است اگر مخرج کسر صفر مطلق باشد حاصل حد وجود ندارد، اگر صورت کسر صفر مطلق باشد حاصل حد صفر است.

صفر حدی →

$$\begin{cases} 2^+ - 2 = 0^+ \\ 2 - 2^+ = 0^- \end{cases} \qquad 2 - 2^- = 0^+ \qquad 2^- - 2 = 0^-$$

نکات صفر مطلق و حدی:

صفر مطلق × عدد = صفر مطلق

صفر مطلق × ∞ = صفر مطلق

صفر حدی × عدد = صفر حدی

صفر حدی × ∞ = مبهم

صفر = کران دار × صفر حدی یا مطلق

$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$ صفر حدی

$\frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty$

$\frac{\text{عدد}}{\text{صفر حدی}} = \infty$

$\frac{\text{صفر حدی}}{\text{عدد}} = 0$ حدی

$\frac{\text{صفر یا عدد یا صفر حدی}}{\text{صفر مطلق}} =$ تعریف نشده

هرگاه جواب حد $\frac{0}{0}$ مبهم شد می توان از قاعده هوپیتال استفاده کرده

$$\text{Hop} = \frac{\text{مشتق صورت}}{\text{مشتق مخرج}}$$

اگر جواب هوپیتال هم $\frac{0}{0}$ شد می توان مجدداً هوپیتال استفاده کرد.

مثال

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1-[x]}{x^2-|x|}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-1}{x^2-x}=\frac{1-1}{(1^+)^2-1^+}=\frac{0}{0}=0$$

مطلق ← 0

حدی ← 0

$[1^+]\to 1$

$|x| \xrightarrow{1^+} x$

(هم ارزی:) وقتی کمان سینوس و کسینوس به صفر میل کند می توان از هم ارزی مثلثاتی استفاده کرد:

(1) $\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$

(2) $\sin^n u \underset{u\to 0}{\sim} u^n$

(3) $1-\cos u \underset{u\to 0}{\sim} \frac{u^2}{2}$

(4) $\cos u \underset{u\to 0}{\sim} 1-\frac{u^2}{2}$

(5) $1-\cos^m u \underset{u\to 0}{\sim} \frac{mu^2}{2}$

(6) $\cos^m u \underset{u\to 0}{\sim} 1-\frac{mu^2}{2}$

مثال: حد کسر $\frac{1-\cos x}{x\sin x}$ وقتی $x\to 0$ کدام است؟

0/5	1
1/5	2

$1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{(x)(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

حاصل $\lim_{x\to 0^-}\frac{x\sqrt{1-\cos 2x}}{1-\sqrt{\cos x}}$ کدام است؟

$2\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$
$-2\sqrt{2}$	$-4\sqrt{2}$

$\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{1-\left(1-\frac{(2x)^2}{2}\right)}=\sqrt{2x^2}$

هم ارزی (3)

$1-\sqrt{\cos x}=1-(\cos x)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{4}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{x|x|\sqrt{2}}{\frac{x^2}{4}}=\frac{-\cancel{x^2}\sqrt{2}}{\frac{\cancel{x^2}}{4}}=\boxed{-4\sqrt{2}}$$

نکته: حاصل اوقات بهتر است ابتدا کسر داده شده را با گویا کردن ساده کنیم سپس از هم ارزی استفاده کنیم.

ریاضی خارج ۹۲:

حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 5x}}{x^2}$ کدام است؟

۳	۲
۶	٤

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}-\sqrt{1-\frac{25x^2}{2}}}{x^2}=\frac{0}{0}$$ لذا ابتدا گویا می‌کنیم

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 5x}}{x^2}\times\frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 5x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 5x}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 5x}{x^2\underbrace{(\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 5x})}}$$

← چون عبارت صفر نمی‌شود می‌توانیم بجای x مقدارش را قرار دهیم

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 5x}{x^2(\sqrt{\cos 0}+\sqrt{\cos 0})}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 5x}{2x^2}\ \underline{\underline{\text{هم‌ارزی}}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\frac{x^2}{2})-(1-\frac{25x^2}{2})}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{24x^2}{2}}{2x^2}=\frac{24}{4}=\boxed{6}$$

یا می‌توانیم از قاعده هوپیتال استفاده کنیم.

هم‌ارزی: در حالت ابهام $\frac{0}{0}$ حد هر عبارت شامل x (فاقد عدد ثابت) وقتی $x\to 0$ در صورت وجود هم ارز با جمله‌ای است که توان x در آن کوچکتر است.

مثال) $\displaystyle 2x^2+x-4\sqrt[3]{x}\underset{x\to 0}{\simeq}-4\sqrt[3]{x}$

$$1+4x^3-2x\underset{x\to 0}{\sim}1-2x$$

مثال: حاصل $\lim\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}}$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$	۰
وجود ندارد	۲-

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\cancel{\sqrt[3]{x}}}{\cancel{\sqrt[3]{x}}}=\boxed{-2}$$

نکته: $\begin{cases} x \neq a \to a^+, a^- \\ x = a \to f(a) \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x \geq a \longrightarrow a^+, f(a) \\ x < a \longrightarrow a^- \end{cases}$

تجربی ۸۷: در تابع با ضابطه $f(x) = (x+a)[x]$ اگر $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) - \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3$ باشد عدد حقیقی a کدام است؟

۲	۱
۰	-۱

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2^+ + a)[2^+] = (2+a)(2) = \boxed{4+2a}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (2+a)[2^-] = \boxed{2+a}$$

$$4+2a-(2+a) = 3 \Longrightarrow 2+a = 3 \Longrightarrow \boxed{a=1}$$

تجربی: حد چپ تابع $f(x) = \dfrac{(3-[x])\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$ در نقطه $x=3$ کدام است؟

۱	۰
موجود نیست	-۱

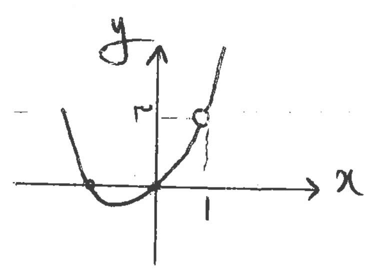
$$\sqrt{x^2-6x+9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3| \xrightarrow{3^-} -(x-3)$$

$$[3^-] = 2$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 3^-} \frac{(3-2)\times(-\cancel{(x-3)})}{\cancel{(x-3)}} = \boxed{-1}$$

تجربی ۸۷: شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \dfrac{4x^3+ax+b}{x-1}$ است. زوج (a,b) کدام است؟

$(-4,1)$	$(0,-4)$
$(4,0)$	$(-4,0)$



تابع از نقطه $(0,0)$ عبور کرده

$\Downarrow$

$$f(0) = 0 \Longrightarrow$$

$$0 = 4(0)^3 + a(0) + b$$

$$\Longrightarrow \boxed{b=0}$$

$$f(x) = \frac{4x^3+ax}{x-1}$$

وچون تابع در $x=1$ حد دارد وچون $x=1$ مخرج را صفر می‌کند لذا باید صورت را نیز صفر کند

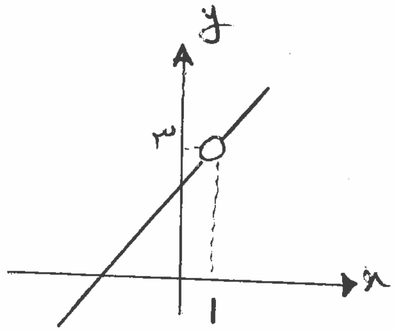
تا تابع f در $x=1$ حد داشته باشد.

$$\lim_{x\to 1} (4x^3+ax) = 0 \to 4+a=0 \to \boxed{a=-4}$$

سوم

شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x+c}$ است. a کدام است؟

۲	۱
-۲	-۱



در $x=1$ تابع تعریف نشده لذا ریشه مخرج خواهد بود

$$x+c=0 \longrightarrow x=-c$$
$$x=1 \longrightarrow \boxed{c=-1}$$

از طرفی چون تابع در $x=1$ حد دارد و مقدار آن برابر ۳ است لذا چون عامل صفرکننده $(x-1)$ در مخرج داریم باید این عامل $(x-1)$ در صورت کسر هم وجود داشته باشد تا حد جواب داشته باشد

$$x^2+ax+b \Rightarrow (x-1)(x-b)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x-b)}{\cancel{(x-1)}}=3 \Rightarrow 1-b=3 \longrightarrow \boxed{b=-2}$$

$\Rightarrow$ صورت کسر $\longrightarrow (x-1)(x+2)=x^2+x-2$

$x^2+ax+b \Rightarrow a=1$

تجربی ۸۰: به ازای کدام مجموعه مقادیر a تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}(x+a)^2 & x\geq -1\\ 2x+1 & x<-1\end{cases}$ در نقطه $x=-1$ حد دارد؟

$\{2\}$	$\{0\}$
IR	$\varnothing$

شرط داشتن حد ← برابر بودن حد چپ و راست.

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = (-1+a)^2 \qquad \lim_{x\to(-1)^-} f(x) = -2+1=-1$$

$$(-1+a)^2 \neq -1$$

یک عبارت به توان دو هیچ گاه برابر ⊖ نخواهد شد

ریاضی ۸۶: اگر $f(x)=\begin{cases}ax-1 & x<1\\ x^2+2a & x\geq 1\end{cases}$ و $\lim_{x\to 1^+}f(x)-\lim_{x\to 1^-}f(x)=-1$ مقدار a کدام است؟

$$1+2a-(a-1)=-1 \Rightarrow 1+2a-a+1=-1 \longrightarrow \boxed{a=-3}$$

ریاضی خ ۸٤

حاصل ضرب حد چپ و راست تابع با ضابطه $f(x)=[x]+\operatorname{sgn}x$ وقتی $x\to 0$ کدام است؟

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0 \to 0^+\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\to 0^-\end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline -1 & -2 \end{array}$$

$$\lim_{x\to 0^+}=[0^+]+1=1 \qquad \lim_{0^-}=[0^-]-1=-2$$

$$1\times -2=-2$$

ریاضی ۸۹ مهم: در تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & x>0\\ -\sqrt{1+x} & x\leq 0\end{cases}$ حاصل $\lim_{x\to 0^-} f(x^3-x)$ کدام است؟

$$\lim_{x\to 0^-} x^3-x=0-0=0$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline -1 & \end{array}$$ موجود نیست

چون بحث ترکیب توابع مطرح است لذا باید بررسی کنیم که تابع داخلی $y=x^3-x$ با مقادیر بیشتر از صفر به صفر نزدیک می‌شود یا کمتر از آن:

$$\lim_{x\to 0^-} x^3-x=\underset{\downarrow\, 0^-}{x}\underbrace{(x^2-1)}_{\ominus}\Rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x^3-x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

لذا برای محاسبه حد باید از ضابطه اولی f استفاده کنیم

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{1-0^+}=\boxed{1}$$

تجربی خ ۸۸ :

حاصل $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}$ کدام است؟

۲	۴
۲-	۴-

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1-\sqrt{1}}{2-\sqrt{5-1}} = \frac{0}{0} \xRightarrow{Hop} \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{-1}{2\sqrt{5-x}}} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 2\sqrt{5-x} = \boxed{2}$$

ریاضی ۹۰

حد عبارت $\dfrac{|x^2-x-2|}{2x-\sqrt{x^2+12}}$ وقتی $x\to 2^-$ کدام است؟

۲	۳
۲-	۳-

$$x^2-x-2 = \underset{\ominus}{(x-2)}\underset{\oplus}{(x+1)} \Rightarrow |x^2-x-2| = -(x-2)(x+1)$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)(x+1)}{2x-\sqrt{x^2+12}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{Hop} \lim_{x\to 2^-} \frac{-(2x-1)}{2-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+12}}}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{-(3)}{2-\frac{2}{\sqrt{16}}} = \frac{-3}{2-\frac{2}{4}} = \frac{-3}{\frac{3}{2}} = -3\times\frac{2}{3} = \boxed{-2}$$

تجربی خ ۹۳ : حاصل $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2-4x+4}}$ کدام است؟

$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{6}$

$$\frac{0}{0} \xRightarrow{Hop} \lim_{x\to 2^+} \frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{(x-2)^2}} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\underset{\oplus}{|x-2|}} = \frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{(x-2)}$$

$$\xrightarrow{Hop} \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+6)^2}}}{1} = \frac{1}{3\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4^3}} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

ریاضی خارج ۹۵:

اگر $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1}=\dfrac{3}{2}$ باشد b کدام است؟

۴	۵
-6	-8

چون $x=1$ مخرج کسر را صفر می‌کند لذا صورت هر عددی بجز صفر شود جواب حد $\frac{3}{2}$ نخواهد بود و لازمه آن است که صورت نیز صفر شود تا جواب حد $\frac{0}{0}$ شود و سپس با هوپیتال به جواب $\frac{3}{2}$ برسیم

$$\sqrt{ax+b}-2 \xrightarrow{x=1} \sqrt{a+b}-2=0$$

$$\sqrt{a+b}=2 \longrightarrow \boxed{a+b=4}$$

$$\boxed{\text{Hop}}\quad \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}}{2x}=\frac{3}{2} \Longrightarrow \frac{a}{4(x)\sqrt{ax+b}}=\frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{x=1} \frac{a}{4\underbrace{\sqrt{a+b}}_{2}}=\frac{3}{2} \Longrightarrow \frac{a}{8}=\frac{3}{2} \longrightarrow a=\frac{24}{2}=\boxed{12}$$

$$a+b=4 \xrightarrow{a=12} \boxed{b=-8}$$

ریاضی خارج ۹۶ : حد عبارت $\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{x}$ وقتی $x\to 0^+$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$	1
$-\frac{1}{2}$	-1

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{1-\cos 0}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}}$$

نیاز به ۲ بار مشتق گیری باشد لذا از هم‌ارزی استفاده می‌کنیم

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{x}=\frac{\frac{x}{2}}{x}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

ص ۱۵

ریاضی ۹۴: حد عبارت $\dfrac{\sqrt{\cos 3x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}$ وقتی $x\to 0$ کدام است؟

-2	2
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$\sqrt{\cos 3x}=(\cos 3x)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\frac{(3x)^2}{2}=\boxed{1-\frac{9x^2}{4}}$$

$$\sqrt{\cos x}=1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}=\boxed{1-\frac{x^2}{4}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{9x^2}{4}\right)-\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}{x^2}=\frac{-\frac{9x^2}{4}+\frac{x^2}{4}}{x^2}=\frac{-\frac{8x^2}{4}}{x^2}=-2$$

ریاضی خارج ۸۵: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 3x}{\sqrt{1-\cos x}}$ کدام است؟

$-\sqrt{2}$	2
$-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-3x}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}}=\frac{-2x}{\frac{|x|}{\sqrt{2}}}=\frac{(-2x)\sqrt{2}}{-x}=2\sqrt{2}$$

تجربی خ ۸۴: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$ کدام است؟

3	1
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}}{x^2}=\frac{\frac{1}{4}x^2}{x^2}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

مهم

ریاضی ۹۴: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\left([2x]+[-2x]\right)\dfrac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}}$ کدام است؟

-3	3
حد ندارد	0

$$\lim_{x\to 0}[2x]+[-2x]=-1$$

هم ارزی

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{3\frac{x^2}{2}}{1-\sqrt{1+x^2}}\xrightarrow[\text{یا هوپیتال}]{\text{یا لویا}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{3x^2}{2}}{1-\sqrt{1+x^2}}\times\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{(\frac{3}{2}\cancel{x^2})(1+\sqrt{1+x^2})}{\underbrace{1-(1+x^2)}_{-\cancel{x^2}}}$$

$$\frac{(\frac{3}{2})(1+\sqrt{1})}{-1}=\boxed{-3}$$

ریاضی ۹۳: حاصل $\lim_{x\to0}\frac{\cos^2x-\sqrt{\cos x}}{x^2}$ کدام است؟

$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{2(x^2)}{2}-(1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2})}{x^2}=\frac{\cancel{1}-x^2-\cancel{1}+\frac{x^2}{4}}{x^2}=\boxed{-\frac{3}{4}}$$

ریاضی ۸۳: حاصل $\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\frac{|\cos\pi x|}{1-\sqrt{2x}}$ کدام است؟

2π	π
$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$

$$\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\frac{+\pi\sin\pi x}{\frac{-2}{2\sqrt{2x}}}=\frac{+\pi\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{-1}{\sqrt{2(\frac{1}{2})}}}=\frac{+\pi}{-1}=\boxed{-\pi}$$

$$|\underbrace{\cos(\tfrac{\pi}{2})^+}_{\ominus}|=-\cos\pi x$$

ریاضی ۹۲: حاصل $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(1+\cos x)}{1-\cos 2x}$ کدام است؟

1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	2

Hop $\lim_{x\to\pi}\frac{(-\sin x)\overbrace{\cos(1+\cos x)}^{\to1}}{2\sin 2x}\Rightarrow$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{-\sin x}{2\sin 2x}=\lim_{x\to\pi}\frac{-\cancel{\sin x}}{4\cancel{\sin x}\cos x}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

پیوستگی: تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ پیوسته است هرگاه

مقدار تابع در آن نقطه = حد چپ = حد راست

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

نکات پیوستگی:

① توابع چندجمله‌ای در هر نقطه‌ای پیوسته هستند $y=x^3-2x$

② $y=|f(x)|$ (اگر f تابعی پیوسته باشد) در هر نقطه‌ای پیوسته است. $|x^2+x|$

③ تابع $y=\sqrt[2k]{f(x)}$ (f پیوسته باشد) در هر نقطه‌ای غیر از نقاط انتهای دامنه پیوسته است.

برای مثال $y=\sqrt{x-1}$ در $x=2$ پیوسته است ولی در $x=1$ (نقطه انتهای دامنه) ناپیوسته است

چون در همسایگی چپ $x=1$ تعریف نمی‌شود.

$D_f = x \geq 1$

$[1,+\infty)$

④ تابع $y=\sqrt[2k+1]{f(x)}$ در هر نقطه‌ای پیوسته است (f پیوسته باشد)

⑤ $y=\sin ax$ و $y=\cos ax$ در هر نقطه‌ای پیوسته هستند. برای مثال $y=\sin x$ در $x=\frac{\pi}{2}$ پیوسته است.

⑥ تابع $y=[ax]$ در نقاطی که داخل جزء صحیح را صحیح کند ناپیوسته است و در سایر نقاط پیوسته است. برای مثال $y=\left[\frac{x}{2}\right]$ در $x=2$ ناپیوسته است اما اگر پشت همین جزء صحیح یک عبارت پیوسته صفرشونده مثل $(x-2)$ ضرب شده باشد تابع در $x=2$ پیوسته می‌شود.

$$f(x) = (x-2)\left[\frac{x}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = (2-2)\left(\left[\frac{2^+}{2}\right]\right) = 0(1) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = (2-2)\left[\frac{2^-}{2}\right] = 0(0) = 0 \end{cases}$$

نکته: تابع $f(x) = g(x)[x]$ (g تابع پیوسته) در $x = a \in \mathbb{Z}$ پیوسته است.
هرگاه تابع g در $x = a$ عبارتی صفرشونده باشد. (یعنی $g(a)=0$)

ریاضی ۹۳: تابع با ضابطه $f(x) = (-1)^{[x]} \sin\frac{\pi x}{2}$ در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ از نظر پیوستگی
چگونه است؟ فقط در اعداد زوج پیوسته — فقط در اعداد فرد پیوسته
همواره ناپیوسته | همواره پیوسته

$$(-1)^{[x]} \Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = (-1)^{[2^+]} = 1 \\ \qquad\qquad\neq \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = (-1)^{[2^-]} = -1 \end{cases}$$

$\sin\frac{\pi x}{2} \longrightarrow$ x زوج باشد (مثلاً ۲)

$$\sin\frac{2\pi}{2} = \sin\pi = 0$$

x فرد باشد (مثلاً ۱)

$$\begin{cases} \sin\frac{\pi}{2} = 1 \\ \sin\frac{3\pi}{2} = -1 \end{cases}$$

لذا وقتی x زوج است $\sin\frac{\pi x}{2}$ برابر صفر است و حد چپ و راست $= 0$ می شود

لذا وقتی x زوج است تابع f پیوسته است.

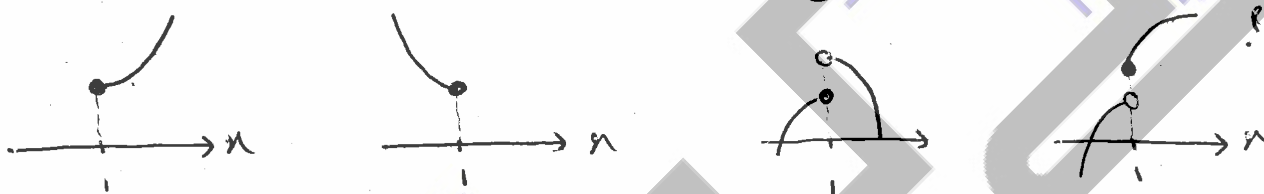
تابع f در $x=a$ فقط از راست پیوسته است هرگاه حد راست برابر با مقدار تابع در آن نقطه باشد

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

تابع f در $x=a$ فقط از چپ پیوسته است هرگاه حد چپ برابر با مقدار تابع در آن نقطه باشد.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

مثال: در کدام یک از شکل‌های زیر تابع در همسایگی $x=1$ تعریف شده و در این نقطه فقط پیوستگی چپ دارد؟



تابع در $x=1$ ناپیوسته است و پیوستگی راست دارد

تابع در $x=1$ ناپیوسته است و پیوستگی چپ دارد.

✓ تابع پیوستگی چپ دارد

از راست پیوسته.

تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{[x]\sin x}{2x-|x|} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ در $x=0$ فقط پیوستگی چپ دارد، a کدام است؟

1	0
$-\frac{1}{3}$	-1

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) \Longrightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{[0^-]\sin x}{2x+x}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin x}{3x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{3x} = -\frac{1}{3}$$

$$f(0)=a \Longrightarrow \boxed{a=-\frac{1}{3}}$$

قضایای پیوستگی:

۱) اگر توابع f و g در $x=a$ پیوسته باشند آنگاه توابع $f \pm g$ ، $f \times g$ در $x=a$ پیوسته هستند. تابع $\frac{f}{g}$ هم با شرط $g(a) \neq 0$ در a پیوسته است.

۲) اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد ولی g ناپیوسته باشد آنگاه توابع $f \pm g$ و $\frac{g}{f}$ حتماً در $x=a$ ناپیوسته هستند.

۳) اگر تابع g در x_0 و تابع f در $g(x_0)$ پیوسته باشد آنگاه تابع fog در x_0 پیوسته است.

پیوستگی در بازه:

۱) تابع f را بر بازه (a,b) پیوسته گوئیم هرگاه در هر نقطه بازه (a,b) پیوسته باشد.

۲) تابع f را بر بازه $[a,b)$ پیوسته گوئیم هرگاه در هر نقطه بازه (a,b) پیوسته باشد و در $x=a$ پیوستگی راست داشته باشد.

۳) تابع f را بر بازه $(a,b]$ پیوسته گوئیم هرگاه در هر نقطه بازه (a,b) پیوسته باشد و در $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

۴) تابع f را بر بازه $[a,b]$ پیوسته گوئیم هرگاه در هر نقطه بازه (a,b) پیوسته باشد و در $x=b$ پیوستگی چپ و در $x=a$ پیوستگی راست داشته باشد.

حد در بی نهایت:

هرگاه $x \to \pm\infty$ باشد و عبارت ما کسری باشد:

۱) درجه صورت $>$ درجه مخرج $\longrightarrow$ جواب حد $\pm\infty$

۲) درجه صورت $=$ درجه مخرج $\longrightarrow$ جواب حد عدد است

۳) درجه صورت $<$ درجه مخرج $\longrightarrow$ جواب حد صفر است

برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ اگر :

$$\sqrt{x^2}=|x| \Longrightarrow \begin{cases} x\to+\infty \to |x|=x \\ x\to-\infty \to |x|=-x \end{cases}$$

هم‌ارزی رادیکال :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{ax^2+bx+c} \sim \sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|$$

هم‌ارزی توابع رادیکالی در بی‌نهایت

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[m]{ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}} \Longrightarrow \begin{cases} \sqrt[m]{a}\left|x+\frac{b}{ma}\right| & \text{زوج } m \\ \sqrt[m]{a}\left(x+\frac{b}{ma}\right) & \text{فرد } m \end{cases}$$

پیوستگی تابع جزء صحیح

در مورد تابع $[f(x)]$ باید بررسی کنیم در چه نقاطی داخل جزء صحیح، عدد صحیح می‌شود در این نقاط امکان ناپیوستگی داریم.

① اگر تابع داخل جزء صحیح در آن نقطه صعودی باشد فقط از راست پیوستگی داریم باشد.

② اگر تابع داخل جزء صحیح در آن نقطه نزولی باشد فقط از چپ پیوستگی داریم مثل $x=\sqrt{2}$ در $[x^2]$

$x=-1$ در $[x^2]$

③ اگر تابع در آن نقطه min باشد از هر دو طرف پیوستگی داریم مثل $x=0$ در $[x^2]$

④ اگر تابع در آن نقطه max باشد فقط حد داریم و از هیچ طرف پیوسته نیست.

مثل $x=\frac{\pi}{2}$ در $[\sin x]$

تجربی ۹۸: درمورد تابع با ضابطه $f(x)=\frac{x^2-1}{x+|x|}$ کدام بیان درست است؟

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ ×	$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ ×
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ ✓	$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

$$|x|+x \neq 0 \Rightarrow |x| \neq -x \rightarrow x<0$$

$$\Rightarrow D_f = (0,+\infty)$$

در این بازه 0^- تعریف نشده لذا بررسی نمی‌شود

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{x+\underbrace{|x|}_{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{2x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

تجربی ۹۸: اگر $f(x)=2x+\sqrt{4x^2+x}$ حاصل $\lim_{x\to -\infty} f(x) = ?$

0	-1
$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$

روش اول استفاده از هم‌ارزی $\Rightarrow \lim_{x\to -\infty} 2x+\sqrt{4x^2+x} = 2x+\sqrt{4}\,\Big|\underbrace{x+\frac{1}{2(4)}}_{x\to-\infty}\Big|$ $(-)$

$$2x+(2)\left(-\left(x+\frac{1}{8}\right)\right) = 2x-2x-\frac{1}{4} = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

روش دوم: برای محاسبه حد $\infty-\infty$ توابع رادیکالی باید صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت رادیکالی ضرب کنیم سپس بیش‌ترین درجه صورت را بر بیش‌ترین درجه مخرج تقسیم کنیم.

$$\lim_{x\to -\infty} 2x+\sqrt{4x^2+x} \times \frac{2x-\sqrt{4x^2+x}}{2x-\sqrt{4x^2+x}} = \frac{\cancel{4x^2}-\cancel{4x^2}-x}{2x-\sqrt{4x^2+x}}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{2x-|2x|} = \frac{-\cancel{x}}{4\cancel{x}} = -\frac{1}{4}$$

$\boxed{\text{تجربی ۹۸ خ}}$: اگر $f(x)=x-\sqrt{4x^2+x}$ باشد حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$

۲	-۲
۳	-۱

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{4x^2+x}}{x}=\frac{x-\overset{\ominus}{|2x|}}{x}=\frac{3x}{x}=3$$

$\boxed{\text{تجربی ۹۸ خ}}$: تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{2|x-2|} & x\neq 2 \\ 2 & x=2\end{cases}$ از نظر پیوستگی در

$x\neq 2 \to 2^+ , 2^-$

$x=2 \to f(2)$

از چپ پیوسته	پیوسته
از چپ ناپیوسته از راست ناپیوسته	از راست پیوسته

$x=2$ چگونه است؟

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{2\underset{\oplus}{|x-2|}}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{2\cancel{(x-2)}}=\frac{4}{2}=2$$

$f(2)=2$

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{-2\cancel{(x-2)}}=\frac{4}{-2}=-2$$

چون حد راست برابر مقدار تابع در $x=2$ می باشد لذا از راست پیوسته است.

$\boxed{\text{ریاضی ۹۸ د}}$: اگر $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-5}{x^2+ax+b}=-\infty$ باشد $a+b$ کدام است؟

۰	-۱
۲	۱

می دانیم که $\frac{\text{عدد}}{0}=\infty$ لذا باید $x=2$ ریشه تکراری مخرج باشد

$$(x-2)^2=x^2+ax+b$$
$$=x^2-4x+4$$

$b=4$

$a=-4$

$$\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

ص ۲۴

تجربی ۹۷ :

حاصل $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}\;-1}$ کدام است؟

-112	-96
-84	-72

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \frac{0}{0} \Longrightarrow \text{Hop}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{6x-10}{\dfrac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{3-\sqrt{x}}}} = \frac{6(4)-10}{\dfrac{-\frac{1}{2\sqrt{4}}}{2\sqrt{3-\sqrt{4}}}} = \frac{14}{\dfrac{-\frac{1}{4}}{\frac{2}{1}}} = \frac{14}{-\frac{1}{8}}$$

$$= -8\times 14 = \boxed{-112}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$(\sin u)' = u'\cos u$$

$$(\cos u)' = -u'\sin u$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$$

$$f(x) = c \longrightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$

تجربی ۹۶: حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{6}{x^2-2x}-\frac{x+1}{x-2}\right)$ کدام است؟

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{6}{4-4}-\frac{3}{2-2}\right)=\infty-\infty$$

در این گونه سوالات که حاصل حد $\infty-\infty$ می باشد و رادیکال هم نداریم از دو کسر، مخرج مشترک می گیریم

$$\begin{cases} x^2-2x=x(x-2)\\ x-2\end{cases}$$

عامل غیر مشترک × عامل مشترک = مخرج مشترک

$\boxed{x(x-2)}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{6}{x(x-2)}-\frac{x+1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{6-(x+1)(x)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{6-x^2-x}{x(x-2)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{-(x^2+x-6)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x+3)\cancel{(x-2)}}{x\cancel{(x-2)}}=\boxed{-\frac{5}{2}}$$

تجربی ۹۵: در تابع با ضابطه $f(x)=\frac{ax+\sqrt{4x^2+5}}{2x+2}$ اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{5}{2}$ آنگاه حد $f(x)$ وقتی $x\to -1$ کدام است؟

$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{6}$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{5}{2}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{ax+\sqrt{4x^2+5}}{2x+2}=\frac{5}{2}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+\overset{+2x}{|2x|}}{2x}=\frac{5}{2}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{ax+2x}{2x}=\frac{5}{2}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(a+2)}{\cancel{2}x}=\frac{5}{\cancel{2}}\Rightarrow a+2=5\Rightarrow a=3$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x+\sqrt{4x^2+5}}{2x+2}=\frac{0}{0}\overset{Hop}{\Longrightarrow}\lim_{x\to -1}\frac{3+\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+5}}}{2}=\frac{3+\frac{-8}{2\sqrt{9}}}{2}$$

$$\frac{3-\frac{8}{6}}{2}\Rightarrow\frac{10}{12}=\boxed{\frac{5}{6}}$$

تجربی ۹۴ :

در تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{ax^n+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}}$ اگر $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ باشد آنگاه $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ کدام است؟

۳	۵
-۶	-۴

چون جواب حد $x\to-\infty$ عدد شده لذا باید صورت و مخرج هم درجه باشند.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{3x-|2x|}=-1 \Rightarrow$$

$$\frac{ax^n}{3x+2x}=-1 \Rightarrow \frac{ax^n}{5x}=-1 \xrightarrow{n=1} \frac{a\cancel{x}}{5\cancel{x}}=-1$$

$$\Rightarrow \boxed{a=-5}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{-5x+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}}=\frac{0}{0}\Rightarrow Hop$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{-5}{3-\dfrac{8x+15}{2\sqrt{4x^2+15x}}}=\frac{-5}{3-\dfrac{39}{18}}=\frac{-5}{\dfrac{54-39}{18}}$$

$$=\frac{-5\times 18}{15}=\boxed{-6}$$

تجربی ۹۲

اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax+9}{1-x+\sqrt{x+1}}=3$ آنگاه حد این کسر وقتی $x\to 3$ کدام است؟

۲	۱
۵	٤

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{-x}=3 \Rightarrow a=-3$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{-3x+9}{1-x+\sqrt{x+1}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to 3}\frac{-3}{-1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}=$$

$$\frac{-3}{-1+\frac{1}{4}}=\frac{-3}{-\frac{3}{4}}=-3\times-\frac{4}{3}=\boxed{4}$$

تجربی ۹۱: نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{ax+1+\sqrt{4x^2+9}}{3x-2}$ از نقطه $(1,2)$ می‌گذرد. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ کدام است؟

$$\underset{x}{2} \quad \underset{y}{1}$$

$\frac{2}{3}$	1
$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$f(x)=y \Rightarrow$

$$1=\frac{2a+1+\sqrt{4(2)^2+9}}{3(2)-2} \Rightarrow 1=\frac{2a+1+5}{4}$$

$$\Rightarrow 1=\frac{2a+6}{4} \Rightarrow 2a+6=4 \to 2a=-2 \Rightarrow \boxed{a=-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+|2x|}{3x}=\frac{-x+2x}{3x}=\frac{x}{3x}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

تجربی ۹۰: در تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{3-\sqrt{x^2+5}}{ax^n+4}$ اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{2}$ آنگاه $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=?$

$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{-|x|}{ax^n}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-x}{ax}=\frac{1}{2} \to \boxed{a=-2}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{-2x+4}=\frac{0}{0} \Rightarrow \text{Hop}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{x^2+5}}}{-2}=\frac{\frac{-4}{2\sqrt{9}}}{-2}=\frac{-\frac{4}{6}}{-2}=\frac{4}{12}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

تجربی ۸۵: حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{4x-8}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$ کدام است؟

$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{8}$

$$\infty-\infty \Rightarrow \frac{1}{4(x-2)}-\frac{1}{(x-2)(x+2)} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} 4(x-2)(x+2)$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{4(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}}{4\cancel{(x-2)}(x+2)}=\boxed{\frac{1}{16}}$$

تجربی ۸۹ : در تابع $f(x)=\dfrac{2x-\sqrt{x^2+6x}}{ax-2}$ اگر $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$ آنگاه $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ کدام است؟

$\frac{2}{3}$	0
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-|x|}{ax}=3$$

$$\Longrightarrow \frac{2x-(-x)}{ax}=3 \Longrightarrow \frac{3\cancel{x}}{a\cancel{x}}=3 \longrightarrow \boxed{a=1}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2x-\sqrt{x^2+6x}}{x-2}=\frac{0}{0}\Longrightarrow Hop$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-\frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x}}}{1}=\frac{2-\frac{10}{2\sqrt{16}}}{1}=2-\frac{10}{8}=\frac{6}{8}=\boxed{\frac{3}{4}}$$

تجربی ۸۴ : حد کسر $\dfrac{x^{m+3}+nx+m}{mx^{n-2}-mx+n-1}$ با شرط $n>3$ وقتی $x\to\infty$ برابر -2 است. $m+n$ کدام است؟

5	4
$4/5$	$3/5$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=-2 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{m+3}}{mx^{n-2}}=-2 \Longrightarrow$$

چون جواب حد $x\to\infty$ برابر عدد شده لذا صورت و مخرج باید هم درجه باشند.

$$m+3=n-2 \Longrightarrow \boxed{m-n=-5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^{m+3}}}{m\cancel{x^{n-2}}}=-2 \Longrightarrow \frac{1}{m}=-2 \Longrightarrow \boxed{m=-\frac{1}{2}}$$

$$m-n=-5 \xrightarrow{m=-0/5} -0/5-n=-5 \Longrightarrow n=-0/5+5=4/5$$

$$m+n=4/5-0/5=\boxed{4}$$

ریاضی ۹۸ خ : به ازای مقادیری از a و b تابع با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} x[x] & |x|<1 \\ ax+b & |x|\geq 1 \end{cases}$$

بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است، a کدام است؟

$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$-\frac{3}{2}$	-1

$|x|<1 \Longrightarrow -1<x<1$ ، $x \to (-1)^+$ ، $x \to 1^-$

$|x|\geq 1 \Longrightarrow x\geq 1 \to 1^+ , f(1)$

$x \leq -1 \to (-1)^- , f(-1)$

شرط پیوستگی ← حد چپ و راست و مقدار تابع در نقاط ۱ و ۱-

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$$

$$a(1)+b = 1\,[1^-] \Longrightarrow a+b=0 \Longrightarrow \boxed{a=-b}$$

$$\lim_{x\to (-1)^+} f(x) = \lim_{x\to (-1)^-} f(x) = f(-1)$$

$$\Rightarrow (-1)[-1^+] = a(-1)+b \Longrightarrow -a+b=1 \xrightarrow{a=-b}$$

$$b+b=1 \to 2b=1 \to$$

$$\boxed{b=\frac{1}{2}} \quad , \quad \boxed{a=-\frac{1}{2}}$$

ریاضی ۹۸ خ : حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sin^2 \pi x}{[x]+\cos \pi x}$ کدام است؟

2	1
2π	π

$[1^+]=1$

ابتدا تکلیف جزء صحیح را روشن کنید.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{1+\cos \pi x} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}}$$

$$[(u)^n]' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(2\cancel{\pi}\cos \pi x)(\cancel{\sin \pi x})}{-\cancel{\pi}\cancel{\sin \pi x}} = -2\cos\pi = \boxed{2}$$

ریاضی ۹۷ (**)

تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-[x]}{x^3-x-6} & x\neq 2\\ a & x=2\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در بازه $[2,3)$ پیوسته است؟

$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{11}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

2^- داخل بازه نیست و 2^+ داخل بازه است طبق مصداق‌های ص ۲۰ همین جزوه باید در $x=2$ پیوستگی راست داشته باشیم.

$x\neq 2 \longrightarrow 2^+, 2^-$

$x=2 \longrightarrow f(2)$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \underbrace{f(2)}_{a}$

$\Longrightarrow [2^+]=2 \longrightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-2}{x^3-x-6} = \dfrac{2-2}{8-2-6}=\dfrac{0}{0}\longrightarrow \text{Hop}$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{3x^2-1} = \dfrac{1}{11} \longrightarrow \dfrac{1}{11}=a$

ریاضی ۹۶: تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}[x]+[-x] & x\notin \mathbb{Z}\\ a & x\in \mathbb{Z}\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟

۰	-1
همواره ناپیوسته	۱

می‌دانیم که $[x]+[-x]=\begin{cases}-1 & x\notin\mathbb{Z}\\ 0 & x\in\mathbb{Z}\end{cases} \Longrightarrow a=-1$

$f(x)=\begin{cases}-1 & x\notin \mathbb{Z}\\ a & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$

ریاضی ۹۵: حد عبارت $\left[\sin(x-\frac{\pi}{3})\right]\cos 3x + [\tan^2 x]$ وقتی $x\to\frac{\pi}{3}$ کدام است؟

۲	۱
حد ندارد	۳

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}^+} \left[\sin(\frac{\pi}{3}^+ - \frac{\pi}{3})\right]\cos(3\times\frac{\pi}{3}^+) + \left[\tan^2(\frac{\pi}{3}^+)\right]$

$= \underbrace{\left[\sin 0^+\right]}_{0}\cos(\pi^+) + \left[(\sqrt{3}^+)^2\right]_{3^+} = \boxed{3}$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{3})^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}^-} [\sin^-]\cos\cancel{3}\frac{\pi}{\cancel{3}} + [3^-] = -\cos\pi + 2$$

$$= -(-1)+2 = \boxed{3}$$

$\boxed{\text{ریاضی ۹۵}}$: تعداد نقاط ناپیوسته تابع با ضابطه $f(x)=[x^2]$ در بازه $[-1,2]$ کدام است؟

۴	۳
۶	۵

$$-1\le x\le 2 \Longrightarrow 0\le x^2\le 4$$

چون $x^2=0$ نقطه min تابع است لذا در $x=0$ پیوسته است درمورد نقاط دیگر آن هایی که در بازه $[-1,2]$ باشند نقاط ناپیوسته هستند.

$x^2=0 \Longrightarrow x=0$

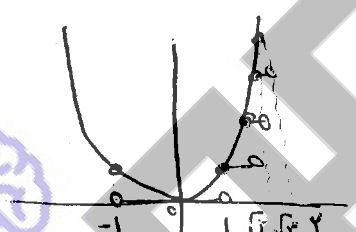
$x^2=1 \Longrightarrow x=\pm 1$

$x^2=2 \Longrightarrow x=\pm\sqrt{2}$

$x^2=3 \Longrightarrow x=\pm\sqrt{3}$ $\Longrightarrow$ مجموعه نقاط ناپیوسته $\{-1, 1, \sqrt{2}, 3, 2\}$

$x^2=4 \Longrightarrow x=\pm 2$

روش دوم به کمک رسم نمودار:



$\boxed{\text{تجربی ۹۷ خ}}$: اگر تابع با ضابطه

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{ax+3} & x<1 \to 1^- \\ x^2+ax & x\ge 1 \to 1^+,\ f(1)\end{cases}$$

در $x=1$ پیوسته باشد $f(-\frac{3}{4})$ کدام است؟

۱/۵	۰/۵
۲/۵	۱/۲۵

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = f(1)$$

$$1+a=\sqrt{a+3}=1+a \Longrightarrow \underbrace{1+a=\sqrt{a+3}}_{\text{با حل کردن } a \text{ در}} \xrightarrow{\text{توان ۲ در}} 1+2a+a^2=a+3$$

$$\Longrightarrow a^2+a-2=0 \Longrightarrow \begin{cases} a=1 & ✓ \\ a=-2 & ✗\end{cases}$$

$$f(-\tfrac{3}{4}) = \sqrt{1(-\tfrac{3}{4})+3} = \sqrt{\tfrac{9}{4}} = \boxed{\tfrac{3}{2}}$$

تجربی ۹۵ خ: به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x-\sin x}{x^2} & x\neq 0 \rightarrow 0^+,0^- \\ a & x=0 \rightarrow f(0)\end{cases}$$

در نقطه $x=0$ پیوسته است؟

۱	۲
۱-	هیچ مقدار

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x-\sin x}{x^2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to 0^+}\frac{2\cos 2x-\cos x}{2x}$$

$$=\frac{2-1}{0}=\infty \qquad a=\text{هیچ مقدار}$$

(روش دوم هم ارزی) $\Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{2x-x}{x^2}=\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x}$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{0^+}=+\infty \\ \neq \\ \lim_{x\to 0^-}\dfrac{1}{0^-}=-\infty\end{cases}$$

مهم

تجربی ۹۵ خ: اگر $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{ax+b}=\dfrac{1}{2}$ آنگاه b کدام است؟

$\frac{1}{2}$	۲
۱-	۲-

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\frac{2-\sqrt{3(2)-2}}{2a+b}=\frac{1}{2}\Longrightarrow\frac{0}{2a+b}\neq\frac{1}{2}$$

لذا باید $2a+b$ نیز برابر صفر باشد تا با استفاده از هوپیتال به جواب $\frac{1}{2}$ برسیم.

$$\boxed{2a+b=0}\xrightarrow{\text{یا}}\frac{0}{2a+b}=\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}\boxed{2a+b=0}$$

$$Hop\Longrightarrow\lim_{x\to 2}\frac{1-\dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}}}{a}=\frac{1}{2}\Longrightarrow\frac{1-\dfrac{3}{4}}{a}=\frac{1}{2}\Longrightarrow$$

$$\frac{\frac{1}{4}}{a}=\frac{1}{2}\longrightarrow a=\boxed{\frac{1}{2}}\longrightarrow \boxed{b=-1}$$

تجربی ۹۴: برای کدام مقدار a تابع با ضابطه

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi}{x} & 1<x\leqslant 6 \\ a+\cos^2\frac{\pi x}{36} & x>6\end{cases}$$

$6^- \to f(6)$ ، $x>6 \to 6^+$

بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگتر از یک پیوسته است؟

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$

$$\lim_{x\to 6^+} f(x)=\lim_{x\to 6^-} f(x)=f(6)$$

$$a+\cos^2\frac{6\pi}{36}=\sin\frac{\pi}{6}\Longrightarrow a+\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^2=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$a+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\Longrightarrow a+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\longrightarrow a=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$$

$$\boxed{a=-\frac{1}{4}}$$

تجربی ۹۴ خ: برای کدام مقدار a تابع با ضابطه

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\cos 3x}{\cos x} & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2} \\ \sin 5x-a & \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2\pi\end{cases}$$

$\frac{\pi}{2}^-$ ، $\left(\frac{\pi}{2}\right)^+ \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

بر روی بازه $[0,2\pi]$ پیوسته است؟

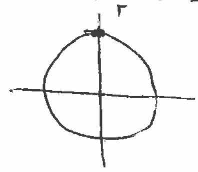
۲	۱
۴	۳

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\frac{5\pi}{2}-a=\boxed{\frac{\cos\frac{3\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}=\frac{0}{0}}\xrightarrow{H.p}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-3\sin 3x}{-\sin x}$$

$$=\frac{3\sin\frac{3\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}=\boxed{-3}\Longrightarrow$$

$\frac{5\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$



$$1-a=-3\longrightarrow\boxed{a=4}$$

تجربی ۹۳ ، تابع با ضابطه

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\tan^2 x}{\cos 2x} & 0<x<\frac{\pi}{4}^{-} \\ a\cos 3x & \frac{\pi}{4}\leq x<\frac{\pi}{2}\end{cases} \longrightarrow \frac{\pi}{4}^{+},\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

به ازای کدام مقدار a در نقطه $x=\frac{\pi}{4}$ پیوسته است؟

۲	۱-
$-2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^{+}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^{-}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$a\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)^{+} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^{-}} \frac{1-\tan^2\frac{\pi}{4}}{\cos 2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{0}{0} \Longrightarrow \text{Hop}$$

$$\downarrow$$

$$-a\frac{\sqrt{2}}{2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^{-}} \frac{(-1)(2)(1+\tan^2 x)(\tan x)}{-2\sin 2x}$$

$$-a\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(-2)(2)(1)}{(-2)(1)} \Longrightarrow -a\frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \Longrightarrow a = -\frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$a = -\frac{4}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^{-}} \frac{1-\tan^2 x}{\cos 2x} = \frac{1-\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\cos^2 x-\sin^2 x}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\cos^2 x-\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}\times\frac{1}{\cos^2 x-\sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{1}{\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \boxed{2}$$

تجربی ۹۳ خ :

برازای کدام مقدار a در $x=\pi$ پیوسته است؟

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi} & \overset{\pi^+}{\pi<x}\le 2\pi \\ a\cos\dfrac{2x}{3} & 0<x\le\pi \end{cases} \qquad \pi^- \quad f(\pi)$$

$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$-2\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} f(x) = f(\pi)$$

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{1+\cos\pi}}{\pi-\pi} = \frac{0}{0} \Longrightarrow \text{Hop} \longrightarrow$$

نباید دوبار هوپیتال استفاده شود

چون مرحله اول نیز $\frac{0}{0}$ می‌شود لذا

می‌دانیم $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} \Longrightarrow \cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2}$

$$\Longrightarrow 1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$$

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{2}\,\overbrace{\left|\cos\frac{x}{2}\right|}^{-\cos\frac{x}{2}}}{x-\pi} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x\to\pi^+}\frac{(-\sqrt{2})\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\sin\frac{x}{2}\right)}{1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi^+}{2}}{1} = +\frac{\sqrt{2}}{2}$$

حد راست = حد چپ

$$\Longrightarrow a\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \boxed{a=-\sqrt{2}}$$

تجربی ۹۹: حاصل $\lim_{x\to(-2)^-} \frac{[x]+3}{x+2}$ کدام است؟

$-\infty$	-1
1	0

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x) = \lim_{x\to[(-2)^-} \frac{-3+3}{(-2)^-+2} = \frac{\overset{\text{مطلق}}{0}}{\underset{\text{حدی}}{0^-}} = 0$$

$[-2^-] = -3$

تجربی ۹۹: تابع با ضابطه $f(x)=\frac{ax-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x^n-12}$ را درنظر بگیرید. اگر $\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{1}{6}$ آنگاه $\lim_{x\to 3} f(x) = ?$

$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{24}$
$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{12}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac16 \Rightarrow \frac{ax}{4x^n}=\frac16 \xrightarrow{n=1} \frac{a}{4}=\frac16$$

$$a=\frac46=\boxed{\frac23}$$

$$\lim_{x\to3} f(x) = \lim_{x\to3}\frac{\frac23(3)-\sqrt[3]{3^2-1}}{4(3)-12} = \frac{2-2}{12-12}=\frac00 \Rightarrow Hop$$

$$\lim_{x\to3} f(x)=\lim_{x\to3}\frac{\frac23-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}{4} = \frac{\frac23-\frac{2\times3}{3\sqrt[3]{(9-1)^2}}}{4}$$

$$= \frac{\frac23-\frac{6}{12}}{4} = \frac{\frac{8-6}{12}}{4} = \frac{2}{12}\times\frac14=\boxed{\frac1{24}}$$

$\boxed{\text{تجربی ۹۹ خ}}$: تابع با ضابطه $f(x)=\frac{3x^n-9x^2+1}{ax^3+7x^2-2}$ را درنظر بگیرید. اگر $\lim_{x\to\infty}f(x)=2$ آنگاه $\lim_{x\to\frac12}f(x)=?$

$-\frac{6}{17}$	$-\frac{4}{17}$
$-\frac{6}{11}$	$-\frac{5}{13}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=2 \Longrightarrow \frac{4x^n}{ax^3}=2 \Longrightarrow \begin{cases} n=3 \\ \frac{4}{a}=2 \longrightarrow a=2 \end{cases}$$

چون جواب حد در بی نهایت عدد شده لذا باید درجه صورت و مخرج یکسان باشد $\Leftarrow n=3$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{4x^3-6x^2+1}{2x^3+7x^2-2}=\frac{0}{0} \Rightarrow Hop \Rightarrow \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{12x^2-12x}{6x^2+14x} \overset{\times 2}{=} -\frac{6}{17}$$

تجربی ۹۹ خ: برای کدام مقدار a تابع با ضابطه

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2\sin^2 x-\sin x-1}{\cos^2 x} & x\neq\frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{2}^+ \quad \frac{\pi}{2}^- \\ a & x=\frac{\pi}{2} \longrightarrow f(\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

در $x=\frac{\pi}{2}$ پیوسته است؟

-1	1
$-1/5$	$1/5$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=f(\frac{\pi}{2})$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}-1}{(\cos^2\frac{\pi}{2})}=\frac{0}{0} \xrightarrow{Hop}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin x\cos x-\cos x}{-2\sin x\cos x}=\frac{2\sin 2x-\cos x}{-\sin 2x}=\frac{0}{0} \xrightarrow{Hop}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{4\cos 2x+\sin x}{-2\cos 2x}=\frac{-4+1}{+2}=\boxed{-\frac{3}{2}}$$

می‌دانیم $\longrightarrow$ $\boxed{\sin 2x=2\sin x\cos x}$

ص ۳۸

تجربی ۹۷: تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} ax+2^{x-3} & x<3 \to 3^- \\ a\log_2(x+1) & x\geq 3 \to 3^+ , f(3) \end{cases}$ در نقطه $x=3$ پیوسته است $f(2)$ کدام است؟

$$\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline -1/5 & -2 \end{array}$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3)$$

$$\Rightarrow a\log_2(3+1) = 3a + 2^{3-3} \Rightarrow a\log_2 4 = 3a+1$$

$$a\log_2 2^2 = 3a+1 \Rightarrow 2a\cancel{\log_2 2} = 3a+1 \Rightarrow 2a = 3a+1$$

$$\Rightarrow \boxed{a=-1}$$

$$f(2) = ax+2^{x-3} \longrightarrow -(2)+2^{2-3} = -2+2^{-1}$$

$$= -2+\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} = -1/5$$

ریاضی ۹۹: فرض کنید $n\in \mathbb{N}$. حاصل

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n+1}-2^{1-2n}}{2^{2n+1}+3\times 2^{1-2n}}$$

کدام است؟

$\frac{1}{3}$	1
-1	$-\frac{1}{3}$

$$n\to\infty \quad 2^{1-2n} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n+1}}{2^{2n+1}} = 1$$

روش دوم $\Longrightarrow$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}\times 2 - \frac{2}{2^{2n}}}{2^{2n}\times 2 + 3\times\frac{2}{2^{2n}}} \xrightarrow{\text{صورت و مخرج } \times 2^{2n}} \lim_{n\to+\infty} \frac{(2^{2n})^2\times 2 - 2}{(2^{2n})^2\times 2 + 6}$$

$$= 1$$

ریاضی ۹۹: حاصل

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x - 7\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x+1}}$$

کدام است؟

-0.6	-0.8
-1.5	-1.2

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{2 - 7\sqrt{1} + 5}{2 - \sqrt{3+1}} = \frac{0}{0} \Longrightarrow \text{Hop}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{2 - \frac{7}{2\sqrt{x}}}{2 - \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}} = \frac{2 - \frac{7}{2}}{2 - \frac{3}{2\sqrt{4}}} = \frac{-\frac{3}{2}}{2 - \frac{3}{4}} =$$

$$-\frac{3}{2}\times\frac{4}{5} = -\frac{12}{10} = \boxed{-1.2}$$

ریاضی ۹۹: فرض کنید $f(x)=\begin{cases}(x-1)[x] & |x-1|<1\\ x^2+ax+b & |x-1|\geq 1\end{cases}$ یک تابع همواره پیوسته باشد مقدار a کدام است؟

-1	1
$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$

$$|x-1|<1 \Rightarrow -1<x-1<1 \Rightarrow 0<x<2$$

$$|x-1|\geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x-1\geq 1 \longrightarrow x\geq 2\\ x-1\leq -1 \quad\;\; x\leq 0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)[x] & 0<x<2 \longrightarrow 0^+ , 2^-\\ x^2+ax+b & x\geq 2 ,\ x\leq 0 \longrightarrow f(0), f(2), 2^+, 0^-\end{cases}$$

باید در $x=0$ و $x=2$ تابع پیوسته باشد

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$

$$(0-1)[0^+] = 0+0+b \Longrightarrow \boxed{b=0}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$$

$$\Longrightarrow 4+2a+b=(2-1)[2^-] \Longrightarrow 4+2a=1$$

$$2a=-3 \Longrightarrow \boxed{a=-\frac{3}{2}}$$

ریاضی ۹۹ خ : فرض کنید $n \in \mathbb{N}$. حاصل

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2\times 3^{2n} + 3^{-2n+1}}$$

کدام است؟

$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-\frac{1}{2}$	0

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{2n} - \cancel{3^{-\infty}}}{2\times 3^{2n} - \cancel{3^{-\infty}}} = \frac{3^{2n}}{2\times 3^{2n}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

ریاضی ۹۹ خ : حاصل $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}$ کدام است؟

$-\sqrt{2}$	-2
2	$\sqrt{2}$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Hop}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{\frac{1}{2}x^2}} = \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}x}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{3}{2\sqrt{2+3x}} - \frac{-1}{2\sqrt{2-x}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{4}{2\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\frac{4}{2\sqrt{2}} \times -\sqrt{2} = \boxed{-2}$$

ریاضی ۹۹ خ : تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $|x|\leq 2$ $f(x)=[x]\sin\pi x$ کدام است؟

۲	۱
۰	۳

$$\boxed{|x|\leq 2 \Longrightarrow -2\leq x\leq 2}$$

در اعداد غیر صحیح هر دو تابع $\sin\pi x$ و $[x]$ پیوسته هستند پس حاصل ضرب آن ها نیز پیوسته است.

در اعداد صحیح $[x]$ ناپیوسته ولی به علت این که مقدار $\sin\pi x$ در اعداد صحیح صفر است نا زهم تابع حاصل ضرب پیوسته است لذا $f(x)$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

تجربی ۱۴۰۰ مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}}\right)$ کدام است؟

$\frac{1}{\sqrt{2}}$	۰
	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}+1}-\sqrt{\frac{x}{x^2}-\frac{x}{x^2+1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+1}-\sqrt{0-0}\right)=\sqrt{2}$$

تجربی ۱۴۰۰ : مقدار $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}^-}[2\sin x-1]$ کدام است؟

۰	-1
وجود ندارد	۱

$$[2\sin\frac{\pi^-}{6}]-1=[2\times(\frac{1}{2})^-]-1=[1^-]-1$$

$$=0-1=\boxed{-1}$$

تجربی ۱۴۰۰: فرض کنید

$$f(x)=1-x^2 \quad , \quad g(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $g\circ f$ کدام است؟

1	0
3	2

$$g\circ f(x)=g(f(x))=\begin{cases}1 & 1-x^2>0 \longrightarrow -1<x<1\\ 0 & 1-x^2=0 \longrightarrow x=\pm 1\\ -1 & 1-x^2<0 \longrightarrow x>1 ,\ x<-1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$$

$$-1 \neq 1 \neq 0 \longrightarrow x=1 \quad \text{ناپیوسته}$$

$$\lim_{x\to (-1)^+} f(x) = \lim_{x\to (-1)^-} f(x) = f(-1) \longrightarrow +1 \neq -1 \neq 0$$

$$\Longrightarrow x=-1 \quad \text{ناپیوسته}$$

تجربی ۱۴۰۰ خ مقدار $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^2+1}-x^2}{x}$ کدام است؟

0	1
$\frac{3}{2}$	-1

$$\sqrt{x^4} \longrightarrow |x^2| = x^2 \quad \Longrightarrow$$

چون $x\to -\infty$

$$\sqrt{x^2} = |x| \longrightarrow -x$$

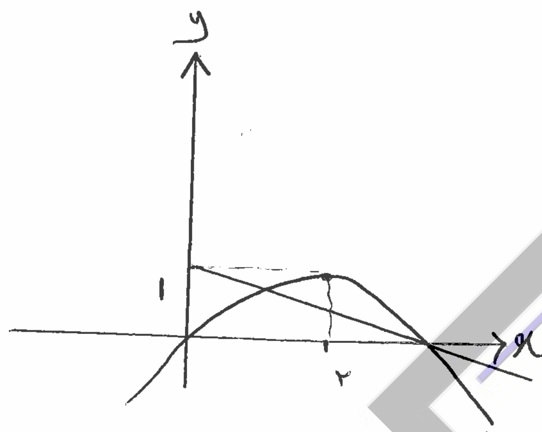
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\cancel{x^2}-x-\cancel{x^2}}{x} = \frac{-x}{x} = \boxed{-1}$$

ص ۴۴

(تجربی ۱۴۰۰ خ :) نمودار تابع سهمی f و خط راست g در شکل زیر داده شده است

مقدار $\lim_{x \to 4^-} \dfrac{f(x)+g(x)}{4-x}$ کدام است؟

$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$
$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$



$\boxed{f(x)} \downarrow$

$f(x) = -\dfrac{x^2}{4} + x \qquad g(x) = -\dfrac{1}{4}x + 1$

$\lim_{x \to 4} \dfrac{f(4)+g(4)}{4-4} = \dfrac{0}{0} \xrightarrow{Hop}$

$\lim_{x \to 4} \dfrac{f'(4)+g'(4)}{-1} = \dfrac{-1+(-\frac{1}{4})}{-1} = \dfrac{-\frac{5}{4}}{-1} = \dfrac{5}{4}$

$f'(x) = -\dfrac{x}{2} + 1 \longrightarrow f'(4) = -2+1 = -1$

$g'(x) = -\dfrac{1}{4}$

نکته $f(x) = A(x-2)^2 + 1 \xrightarrow{(0,0)} 0 = 4A+1 \longrightarrow$

$A = -\dfrac{1}{4} \longrightarrow f(x) = -\dfrac{1}{4}(x^2 - 4x + 4) + 1$

$= -\dfrac{1}{4}x^2 + x - 1 + 1 = -\dfrac{1}{4}x^2 + x$

ص ۴۵

تجربی ۱۴۰۰ خ : فرض کنید $f(x)=x(1-x^2)$ و

$g(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$ تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $(f\circ f)\circ g$

کدام است؟

۱	۰ (۲)
۳	۲

$$f\circ f(x)=f(f(x))=x(1-x^2)\left(1-[(x)(1-x^2)]^2\right)$$

$$=x(1-x^2)-x^3(1-x^2)^3$$

$$f\circ f\circ g\longrightarrow\begin{cases}1(1-1)(1-(1(1-1))^2) & x>0\\ 0(1-0)(1-(0(1-0))^2) & x=0\\ -1(1-1)(1-(-1(1-1))^2) & x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & x>0\\ 0 & x=0 \longrightarrow \text{همواره پیوسته}\\ 0 & x<0\end{cases}$$

یا

$$\begin{cases}x>0\xrightarrow{g}1\xrightarrow{f}0\xrightarrow{f}0\\ x=0\xrightarrow{g}0\xrightarrow{f}0\xrightarrow{f}0\\ x<0\xrightarrow{g}-1\xrightarrow{f}0\xrightarrow{f}0\end{cases}$$

ریاضی ۱۴۰۰ فرض کنید

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)}{\left(1-\cos(\sqrt{2x})\right)^n}=a$$

باشد مقدار $a+n$ کدام است؟

$\frac{9}{4}$	$\frac{7}{4}$
$\frac{17}{4}$	$\frac{15}{4}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)}{\left(1-\cos\sqrt{2x}\right)^n}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)^2}{\left[\frac{(\sqrt{2x})^2}{2}\right]^n}=\frac{\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}{\left(\frac{2x}{2}\right)^n}\xrightarrow{\text{مزدوج}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left[\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+x^2}{\sqrt{1-x^2}\,(1+\sqrt{1-x^2})}\right]^2}{x^n}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x^4}{(1-x^2)(1+\sqrt{1-x^2})^2}}{x^n}=\lim\frac{x^{4-n}}{(1-x^2)(1+\sqrt{1-x^2})^2}=a$$

$$\frac{x^{4-n}}{4}=a\Longrightarrow \begin{cases}n=4\\ a=\frac{1}{4}\end{cases}\Longrightarrow n+a=\boxed{\frac{17}{4}}$$

(ریاضی ۱۴۰۰) مقدار: $\lim_{x\to -\frac{1}{2}^-}\frac{10x-5+\left[\frac{3}{x^2}\right]}{16x-\left[-\frac{2}{x^2}\right]}$ کدام است؟

$\frac{a}{0^-}$ | $-\infty$

$\frac{a}{0^+}$ | $+\infty$

$$x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-\longrightarrow x<-\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{توان ۲}}x^2>\frac{1}{4}\longrightarrow\frac{1}{x^2}<4\xrightarrow{\times 3}$$

$$\frac{3}{x^2}<12\longrightarrow\left[\frac{3}{x^2}\right]=\left[12^-\right]=\boxed{11}$$

$$\frac{1}{x^2}<4\xrightarrow{-2}-\frac{2}{x^2}>-8\longrightarrow\left[-\frac{2}{x^2}\right]=\left[-8^+\right]=-8$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^-}\frac{10\left(-\frac{1}{2}\right)^- -5+11}{16\left(-\frac{1}{2}\right)^- -(-8)}=\frac{1}{-8^-+8}=\frac{1}{0^-}=\boxed{-\infty}$$

(ریاضی ۱۴۰۰) اگر

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[50]{(a^2x^2-1)(a^4x^4-1)\cdots(a^{100}x^{100}-1)}}{a^{49}x^{k}-1}$$

آنگاه مقادیر a و k کدام‌اند؟

$a=1$, $k=51$	$a=-1$, $k=51$
$a=1$, $k=49$	$a=-1$, $k=49$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[50]{(a^2x^2)(a^4x^4)\cdots(a^{100}x^{100})}}{a^{49}x^{k}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[50]{a^{2+4+\cdots+100}}\sqrt[50]{x^{2+4+\cdots+100}}}{a^{49}x^{k}}=\frac{\sqrt[50]{(a^{51})^{50}}\sqrt[50]{(x^{51})^{50}}}{a^{49}x^{k}}$$

$$=\frac{|a^{51}||x^{51}|}{a^{49}x^{k}}=\frac{-|a^{51}|x^{51}}{a^{49}x^{51}}=-1$$

$$\boxed{\begin{matrix}a=1\\k=51\end{matrix}}$$

(ریاضی ۱۴۰۰) فرض کنید: $f(x)=\cos^3 2x+ax^2+b$ و $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=0$ و $\lim_{x\to0^-}\frac{f'(x)}{x}=2$ مقدار $a+b$ کدام است؟

6	8
-8	4

$$f(0)=0\longrightarrow 0=\cos^3(0)+a(0)+b\longrightarrow \boxed{b=-1}$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{3(-2)(\sin2x)(\cos^2 2x)+2ax}{x}=2$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{-6\sin2x\cos^2 2x+2ax}{x}=2$$

۲۸

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-4\sin 2x \, (\cos^2 3x)^{\to 1} + 2ax}{x} = 2$$

هم‌ارزی $\longrightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{-4(2x) + 2ax}{x} = 2 \longrightarrow$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{(2a-12)x}{x} = 2 \longrightarrow 2a-12=2 \longrightarrow 2a=14$$

$$a=7$$

$$a+b = 7-1 = \boxed{6}$$

زبانی ۱۴۰۰ خ : فرض کنید

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(\sqrt{1-x^3}-1) - 2\tan[x]}{x^n(1-\cos(\sqrt{3x}))} = a$$

باشد مقدار a^n کدام است؟

$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

نکته $\sqrt[n]{1\pm u} \sim 1 \pm \frac{u}{n}$

$$-2\tan[x] \xrightarrow{x\to 0^+} 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x^n\left(\frac{(\sqrt{3x})^2}{2}\right)} = \frac{\cancel{1} - \frac{x^3}{2} \cancel{-1}}{x^n \frac{3x}{2}} = \frac{-x^3}{x^n \, 3x}$$

$$\boxed{n=2} \qquad a = -\frac{1}{3} \longrightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$\boxed{\text{ریاضی ۱۴۰۰ خ}}$: مقدار

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^+} \frac{16x - [-\frac{2}{x^2}]}{24x + [\frac{3}{x^2}]}$$ کدام است؟

۰	$\frac{2}{3}$
$-\infty$	$+\infty$

$x > -\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}}$

$x^2 < \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2} > 4 \\ \Rightarrow \frac{3}{x^2} > 12 \end{cases}$

$x^2 < \frac{1}{4} \to \frac{1}{x^2} > 4 \xrightarrow{-2} -\frac{2}{x^2} < -8$

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^+} \frac{16x - [-\frac{2}{\frac{1}{4}^+}]}{24x + [\frac{3}{\frac{1}{4}^+}]} = \frac{16x - [-(8^+)]}{24x + [12^+]}$$

$[-\frac{2}{\frac{1}{4}^+}] \to [-8^-] = -9$

$$= \lim_{x\to(-\frac{1}{2})^+} \frac{-8^+ + 9}{-12^+ + 12} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$\boxed{\text{ریاضی ۱۴۰۰ خ}}$: تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sin^{2n}(x)$ درباره $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۲	۱
۰	۳

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = \frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 \leq x \leq 2\pi - \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\} \\ 1 & x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

در $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ناپیوسته است.

$\boxed{\text{ریاضی ۱۴۰۰ خ}}$: فرض کنید $f(x) = \sin^n(x^2)$ و $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)f'(x)}{(1-\cos(x))^m}$

مقدار $2m+n$ ؟

۷	۵
۱۱	۹

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{2n}\quad 2n\,x^{2n-1}}{\left(\frac{x^2}{2}\right)^m} = \lim_{x\to 0} n\,2^{m+1}\,\frac{x^{4n-1}}{x^{2m}} = 2^{\frac{11}{2}}$$

$$4n-1 = 2m \longrightarrow n\,2^{m+1} = 2^{\frac{11}{2}} \longrightarrow n=2,\ m=\frac{7}{2}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x^3-[x^3]} = ?$$

$\boxed{\text{تجربی ۱۴۰۱}}$ حل

$1 \mid 0$ ، $+\infty \mid \frac{1}{3}$

ابتدا تکلیف جزء صحیح مشخص شود:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x^3-[(2^+)^3]} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x^3-[8^+]}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x^3-8} = \frac{0}{0} \xrightarrow{Hop} \lim_{x\to 2^+} \frac{2x}{3x^2} = \frac{2}{3x} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$\boxed{\text{تجربی ۱۴۰۱}}$ اگر: $g(x) = \dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{|x-1|}$ و $\lim_{x\to +\infty} g(x)$ باشد حاصل $\lim_{x\to 1^+} (4-[x])\,g(x) = 6$ کدام است؟

$-1 \mid 1$ ، $-2 \mid 2$

$$\lim_{x\to 1^+} (4 \overset{3}{\cancel{-[1^+]}})\,g(x) = 6 \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = 2$$

برای تابع $g(x)$ آلف $x\to ۱^+$ مخرج صفر می‌شود و جواب حد باید بی‌نهایت می‌شد چون جواب حد برابر عدد شده لذا به ازای $x=۱$ باید $\frac{۰}{۰}$ ایجاد شود

$$g(x)=\frac{\sqrt{ax^۲+bx+c}}{(x-۱)}$$

صورت باید $(x-۱)^۲$ زیر رادیکال ایجاد شود

$$g(x)=\frac{\sqrt{a(x-۱)^۲}}{x-۱}\Rightarrow \lim_{x\to ۱^+} g(x)=۲$$

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{a}\,\cancel{(x-۱)}}{\cancel{(x-۱)}}=۲\longrightarrow \sqrt{a}=۲\longrightarrow \boxed{a=۴}$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x)=\frac{\sqrt{۴(x^۲-۲x+۱)}}{x-۱}=\lim_{x\to +\infty}\frac{|۲x|}{x}=\boxed{۲}$$

$\boxed{\text{تجربی ۱۴۰۱}}$ الف: $f(x)=x\left(\sqrt{\frac{۲x+۱}{۵x+۹}}\right)^۳$ باشد حاصل $\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)}{x}$ کدام است؟

$\frac{۱}{۲۷}$	$\frac{۱}{۹}$
$\frac{۲}{۷}$	$\frac{۳}{۱۴}$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\cancel{x}\left(\sqrt{\frac{۲x+۱}{۵x+۹}}\right)^۳}{\cancel{x}}=\left(\sqrt{\frac{۱}{۹}}\right)^۳=\left(\frac{۱}{۳}\right)^۳$$

$$=\boxed{\frac{۱}{۲۷}}$$

تجربی خ ۱۴۰۱

حاصل: $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{|x+1|+[x]}{x-[-x]}$ کدام است؟

0	$-\infty$
1	$\frac{1}{2}$

$$[x] \longrightarrow [-1^+] = -1$$

$$[-x] = [-(-1^+)] = [1^-] = 0$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} \frac{x+1-1}{x-0} = \frac{x}{x} = \boxed{1}$$

تجربی خ ۱۴۰۱

اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x+2} = \dfrac{1}{2}$ و $f(x)=\sqrt{ax^2+x+1}$ باشد حاصل $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \left[\dfrac{1}{x}\right] f(x)$ چقدر است؟

$\frac{1}{2}$	1
$-\frac{1}{2}$	-1

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{ax^2+x+1}}{x+2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{a}\,|\cancel{x}|}{\cancel{x}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{a} = \frac{1}{2} \longrightarrow \boxed{a = \frac{1}{4}}$$

$$\left[\frac{1}{-1^-}\right] = [-1] \longrightarrow (-1)^- \text{ یا } (-1)^+ \text{ حال}$$

$$\left[\frac{1}{-\frac{3}{2}}\right] = \Big[\underbrace{-\tfrac{2}{3}}_{-1^+}\Big] \Longrightarrow [-1^+] = -1$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} (-1)\sqrt{\frac{1}{4}(-1)^2-1+1} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

تجربی ۱۴۰۱ خ : الف

با $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}}{2x^2+x-1}$ حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2f(x)-1}{2(x-1)}$ کدام است؟

-1	1
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)-1}{2(x-1)}=\frac{2f(1)-1}{0}\longrightarrow$$

با توجه به گزینه‌ها باید صورت $\frac{0}{0}$ شود $\xleftarrow{Hop}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2f'(x)}{2}=f'(x).$$

$$f(x)=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2x^2+x-1}\Longrightarrow f'(x)=\frac{\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)(2x^2+x-1)-(4x+1)(x^{\frac{3}{2}})}{(2x^2+x-1)^2}$$

$$f'(1)=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)(2)-(5)(1)}{2^2}=\frac{-2}{4}=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

ریاضی ۱۴۰۱ : حاصل $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+4}}{1+\sqrt[3]{x}}$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$	3
$-\frac{3}{2}$	-3

$$\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to -1}\frac{\dfrac{2}{2\sqrt{2x+3}}-\dfrac{3}{2\sqrt{3x+4}}}{\dfrac{(1)}{3\sqrt[3]{x^2}}}=\frac{1-\frac{3}{2}}{\frac{1}{3}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=\boxed{-\frac{3}{2}}$$

ریاضی ۱۴۰۱

تابع
$$f(x)=\begin{cases}|x|+[-x] & |x^3|<x^2\\ 1+\cos\pi x & |x^3|=x^2\\ [x^2]-[x] & |x^3|>x^2\end{cases}$$
در چند نقطه ناپیوسته است؟

۲	۳
بی‌شمار	در هر نقطه پیوسته

$$|x^3|=x^2 \Rightarrow x=0,\pm1$$

$$f(x)=\begin{cases}[x]+[-x] & -1<x<1-\{0\}\\ 1+\cos\pi x & x=1,0,-1\\ [x^2]-[x] & x>1 \text{ یا } x<-1\end{cases}$$

در بی‌شمار نقطه ناپیوسته است.

$$x^2=K\Rightarrow x=\pm\sqrt{K}$$

در این محدوده بی‌شمار x وجود دارد که x^2 صحیح می‌شود

اما x صحیح نمی‌شود ضابطه سوم در تمام این xها ناپیوسته است لذا بی‌شمار ناپیوستگی داریم

ریاضی ۱۴۰۱ خ

حاصل $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{\sqrt{2-2\cos x}}$ کدام است؟

$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \lim\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos x}}=\lim\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{\cancel{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{x^2}{2}}}\quad \frac{|x|}{\cancel{\sqrt{2}}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{-x}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to0}\frac{\frac{-3}{2\sqrt{2-3x}}-\frac{-5}{2\sqrt{2-5x}}}{-1}=\frac{\frac{2}{2\sqrt{2}}}{-1}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}/2$$

$\boxed{\text{ریاضی ۱۴۰۱ خ}}$: تابع

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{2bx^2} & x>0\\ |b-x| & x=0\\ [x]-2a & x<0\end{cases}$$

یک تابع همواره پیوسته است مقدار حقیقی $b-a$ کدام است؟

$\frac{1}{4}$	2
$\frac{25}{14}$	$\frac{5}{4}$

این تابع روی $\mathbb{R}$ پیوسته نیست احتمالاً (حتماً) منظور طراح پیوستگی روی $x=0$ بوده

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{2bx^2}=\frac{0}{0}\xrightarrow[\text{هم‌ارزی}]{HOP}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2bx^2}=\boxed{\frac{1}{4b}}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}[0^-]-2a=\boxed{-1-2a}$$

$$f(0)=|b-0|=|b|$$

$$|b|=\frac{1}{4b}\to b^2=\frac{1}{4}\to \boxed{b=\pm\frac{1}{2}}$$

$$-1-2a=\frac{1}{2}\to 2a=-\frac{3}{2}\to \boxed{a=-\frac{3}{4}}$$

$$b-a=\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{4}\right)=\boxed{\frac{5}{4}}$$