# جزوه ریاضی مبحث

# مشتق و کاربرد مشتق ۱

رشته ریاضی و تجربی

به همراه حل سوالات کنکور ۱۴۰۱ و دوره های قبلی کنکور سراسری

تالیف : مهندس رهبری

مهرماه ۱۴۰۱

# * مشتق *

* مشتق یعنی شیب خط مماس بر نمودار.

نحوه تعریف مشتق

$$\begin{cases} f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ \\ f'(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{cases}$$

تعریف بالا بسیار مهم می باشد در بسیاری از سوالات حد ها فوق را می دهند و شما لازم نیست حد محاسبه کنید فقط باید از تابع داده شده مشتق بگیرید. (براساس فرمول)

شرط این که یک تابع مشتق پذیر باشد:

① مشتق چپ و راست باهم برابر باشد $\Leftarrow \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

② پیوسته باشد $\longleftarrow$ حد چپ = حد راست = مقدار تابع در آن نقطه

فرمول های مشتق:

① $(\sin u)' = u' \cos u$

یعنی از عبارت جلوی سینوس مشتق بگیرید $\times$ cos همان عبارت

② $(\cos u)' = -u' \sin u$

③ $([u]^n)' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$ * بسیار مهم

توان را به پایین انتقال می دهیم $\times$ عبارت زیر توان را مشتق می گیریم $\times$ عبارت صورت سوال را یک توان کاهش می دهیم. کاربرد: توابع مثلثاتی به توان عددی برسند ازاین فرمول استفاده می کنیم همچنین داخل حد های حالت مبهم.

ص۲

۴) $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

* ۵) $\left(\sqrt[n]{u^m}\right)' = \dfrac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$

۶) $(\tan u)' = u'(1+\tan^2 u)$

$(\cot u)' = -u'(1+\cot^2 u)$

۷) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$

۸) $(f \times g)'(a) = f'(a) \times g(a) + g'(a) \times f(a)$

۹) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'(a) \times g(a) - g'(a) \times f(a)}{(g(a))^2}$

۱۰) $y = a \Rightarrow y' = 0$ مشتق عدد = ۰

۱۱) $y = x^n \longrightarrow y' = nx^{n-1}$

۱۲) اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند در این صورت تابع مرکب fog مشتق پذیر است و داریم

مهم $(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$

۱۳) $y = f(u) \longrightarrow y' = u' \cdot f'(u)$

* اگر تابع $f$ در $x=a$ پیوسته نباشد آنگاه $f$ در $x=a$ مشتق‌پذیر هم نیست.

* اگر تابع $f$ در $x=a$ پیوسته باشد و $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$

یا $-\infty$ در این صورت $x=a$ را مماس قائم بر منحنی $f$

در نقطه $(a, f(a))$ می‌نامیم بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

* تابع $f$ در $x=a$ مشتق‌پذیر نیست هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

1) $f$ در $a$ پیوسته نباشد ②

2) $f$ در $a$ پیوسته باشد و مشتق چپ و راست در $x=a$

الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند. نقطه گوشه‌ای

ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه‌ای)

ج) هر دو نامتناهی باشند.

* تابع $f$ روی بازه $(a, b)$ مشتق‌پذیر است هرگاه در هر نقطه این بازه مشتق‌پذیر باشد.

تابع $f$ روی بازه $[a, b]$ مشتق‌پذیر است هرگاه $f$ در بازه $(a, b)$ مشتق‌پذیر باشد

و در نقطه $a$ مشتق راست و در نقطه $b$ مشتق چپ داشته باشد.

آهنگ متوسط $[a, b]$ $\Longrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

آهنگ لحظه‌ای = مشتق در آن نقطه

مهم

معادله خط مماس بر منحنی در نقطه $(x_0 , y_0)$

$$y - y_0 = f'(x)(x - x_0)$$

معادله خط قائم بر منحنی $(x_0 , y_0)$

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x)}(x - x_0)$$

تجربی ۹۸ :

در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{5-2x}$ حاصل $\lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$ کدام است؟

$\frac{4}{9}$    $\frac{5}{12}$    $\frac{7}{12}$    $\frac{5}{6}$

تعریف مشتق در $x=4$

یعنی از تابع داده شده مشتق بگیرید و بجای $x=4$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(5-2x) - (-2)(1+\sqrt{x})}{(5-2x)^2} \xrightarrow{x=4}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{4}}\right)(5-8) - (-2)(1+\sqrt{4})}{(5-8)^2} = \frac{-\frac{3}{4} + 6}{9} = \frac{21}{36} = \boxed{\frac{7}{12}}$$

$$\text{مشتق تابع کسری} = \frac{(\text{مشتق صورت} \times \text{خود مخرج}) - (\text{مشتق مخرج} \times \text{خود صورت})}{(\text{مخرج})^2}$$

ص ۵

تجربی ۹۸ خ

در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{-x-1}{\sqrt{x}}$ حاصل

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\frac{1}{4}+h)-f(\frac{1}{4})}{h}$$

کدام است؟

| | |
|---|---|
| ۱ | ۲ |
| ۳ | ۴ |

تعریف مشتق در نقطهٔ $x=\frac{1}{4}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

$$f'(x)=\frac{(-1)(\sqrt{x})-(\frac{1}{2\sqrt{x}})(-x-1)}{(\sqrt{x})^2}\xrightarrow{x=\frac{1}{4}}$$

$$\frac{(-1)(\frac{1}{2})-(\frac{1}{2\times\frac{1}{2}})(-\frac{1}{4}-1)}{(\frac{1}{2})^2}=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}=3$$

---

تجربی ۹۸

تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1} & x\geq 2\\ -x^2+ax+b & x<2\end{cases}$ روی مجموعهٔ اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است، $b$ کدام است؟

$2^+$ $f(2)$

| | |
|---|---|
| ۱ | ۲ |
| ۱- | ۲- |

$\Rightarrow$ پیوسته است و
مشتق چپ = مشتق راست

(۱) $\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^-}f(x)=f(2)$

$$\frac{1}{2-1}=-(2)^2+2a+b\Longrightarrow 2a+b-4=1\Rightarrow\boxed{2a+b=5}$$

(۲) مشتق چپ = مشتق راست $\Rightarrow$ $-\frac{1}{(x-1)^2}=-2x+a\xrightarrow{x=2}$

$$-1=-4+a\Longrightarrow a=3$$

$$2a+b=5\xrightarrow{a=3}6+b=5\rightarrow\boxed{b=-1}$$

۶ ص

تجربی ۹۸

اگر $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ و $[f(g(x))]'$ باشد $(f\circ g)'(2)=6$، $f'(5)$ کدام است؟

| ۲ | ۳ |
|---|---|
| ۱- | ۲- |

$$(f\circ g)'(2)=g'(2)\times f'(\underbrace{g(2)}_{5})=6$$

$$\Rightarrow (-3)\times f'(5)=6 \Rightarrow f'(5)=\frac{6}{-3}=\boxed{-2}$$

$$g'(x)=\frac{(2)(x-1)-(1)(2x+1)}{(x-1)^2}\xrightarrow{x=2}\frac{(2)(2-1)-(2(2)+1)}{(2-1)^2}\Rightarrow$$

$$\boxed{g'(2)=-3}$$

نکته $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}\Rightarrow\dfrac{-2-1}{(x-1)^2}=-3$

$$g(2)=\frac{2(2)+1}{2-1}=\boxed{5}$$

---

تجربی ۹۸

در تابع با ضابطه $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}$ اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=2$ از آهنگ تغییر متوسط در بازه $[1,4]$ کدام است؟

| ۰/۵ | ۰/۲۵ |
|---|---|
| ۰/۴۵ | ۰/۷۵ |

آهنگ تغییر متوسط $\Rightarrow \dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=\dfrac{\frac{31}{4}-(-\frac{1}{2})}{3}=\dfrac{\frac{31+2}{4}}{3}=\boxed{\frac{33}{12}}$

$$f(4)=\frac{1}{2}(4)^2-\frac{1}{4}=8-\frac{1}{4}=\frac{31}{4}$$

$$f(1)=\frac{1}{2}(1)^2-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$$

آهنگ لحظه‌ای $=$ مشتق $\Rightarrow f'(x)=2(\frac{1}{2})x+\frac{1}{x^2}=x+\frac{1}{x^2}\xrightarrow{x=2}$

$$2+\frac{1}{4}=\boxed{\frac{9}{4}}$$

اختلاف $\dfrac{9}{4}-\dfrac{33}{12}=\dfrac{27-33}{12}=-\dfrac{6}{12}$

$$=-0/5$$

ص ۷

تجربی ۹۸ خ

در تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{8}{ax+b} & x>2\\ -x^3+6x & x\le 2\end{cases}$ اگر $f'(2)$ موجود باشد، a کدام است؟

| | |
|---|---|
| ۲ | ۱ |
| ۴ | ۳ |

$2^{+}$ $\quad 2^{-}$ $\quad f(2)$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$$

$$\Rightarrow \frac{8}{2a+b} = -8+12 \Rightarrow \frac{\cancel{8}^{2}}{2a+b} = \cancel{4}^{1}$$

$$2a+b=2$$

$$f'_{+}(2) = f'_{-}(2) \Rightarrow \frac{-8a}{(\cancel{2a+b})^2_{2}} = -6 \Rightarrow 24=8a$$

$$\boxed{a=3}$$

$$\begin{cases} f'_{+}(2) = \dfrac{-8a}{(ax+b)^2} = \dfrac{-8a}{(2a+b)^2} \\ f'_{-}(2) = -3x^2+6 \xrightarrow{x=2} -12+6=-6 \end{cases}$$

---

تجربی ۹۸ خ

مشتق تابع $f(x)=x\sqrt[3]{\dfrac{3x+1}{x+2}}$ در نقطه $x=-3$ کدام است؟

| | |
|---|---|
| $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{4}$ |
| $\frac{4}{3}$ | $\frac{3}{2}$ |

$$f'(x) = 1\times\sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}} + \left(\sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}}\right)'\times x$$

$$\left(\sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}}\right)' = \frac{\frac{3(2)-(1)(1)}{(x+2)^2}}{3\sqrt[3]{\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^2}} = \frac{\frac{5}{(x+2)^2}}{3\sqrt[3]{\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^2}}$$

$$x=-3 \Rightarrow 1\times\sqrt[3]{\frac{3(-3)+1}{-3+2}} + \frac{\frac{5}{(-3+2)^2}}{3\sqrt[3]{\left(\frac{3(-3)+1}{-3+1}\right)^2}}\times -3 =$$

$$2-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$$

۸

تجربی ۹۸ خ

در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{4x-5}{x+1}$ و دامنهٔ $[0,8]$ خط مماس بر نمودار آن موازی پاره‌خطی است که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل کند. این خط مماس محور $y$ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

$$f(0)=-\frac{5}{1}$$

| $-1$ | $-2$ |
|---|---|
| $-1/5$ | $-1/5$ |

$$f(8)=\frac{4(8)-5}{8+1}=\frac{27}{9}=3$$

$$\begin{bmatrix}0\\-5\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}8\\3\end{bmatrix}$$

$$m=\frac{3-(-5)}{8-0}=1$$

$$f'(x)=\frac{4(1)-(-5)(1)}{(x+1)^2}=\frac{9}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{9}{(x+1)^2}=1\Rightarrow\frac{3}{x+1}=1\Rightarrow x+1=3\Rightarrow \boxed{x=2}$$

$$f(2)=\frac{3}{3}=\boxed{1}\qquad\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

$$y-1=1(x-2)\Rightarrow y=x-2+1\Rightarrow$$

$$y=x-1\longrightarrow$$

محور $y$ها را قطع می‌کند یعنی عرض از مبدأ یا همان $x=0$

$$x=0\rightarrow \boxed{y=-1}$$

ریاضی ۹۸

اگر $g(x)=x+\sqrt{x}$ و $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{4}{3}$ باشد $(f\circ g)'(1)=?$ ۹

$\Rightarrow f'(2)=\dfrac{4}{3}$

| ۳ | ۲ |
|---|---|
| $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{2}$ |

$(f\circ g)'(1)=(f(g(1)))'=g'(1)\cdot f'(g(1))$

$g'(x)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\xrightarrow{x=1} 1+\dfrac{1}{2}=\boxed{\dfrac{3}{2}}\longrightarrow g'(1)$

$g(1)=1+\sqrt{1}=\boxed{2}$

$\longrightarrow g'(1)\times f'(g(1))=\dfrac{3}{2}\times f'(2)=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{4}{3}=\boxed{2}$

---

ریاضی ۹۸

تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}|x^2-2x| & x<2\\ \frac{1}{2}x^2+ax+b & x\geq 2\end{cases}$ در نقطه $x=2$ مشتق‌پذیر است $a+b$ کدام است؟

یعنی پیوسته هم هست

| ۳ | ۲ |
|---|---|
| ۵ | ۴ |

$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=f(2)$

$\frac{1}{2}(2)^2+2a+b=-(2^2-2(2))\Rightarrow 2+2a+b=0$

$2a+b=-2$

$f'(x)=\begin{cases}-(2x-2) & x<2\\ x+a & x\geq 2\end{cases}\Rightarrow f'_+(2)=f'_-(2)$

$2+a=-(2(2)-2)$ $\quad -2$

$\boxed{a=-4}$

$\Rightarrow 2a+b=-2\xrightarrow{a=-4} -8+b=-2\longrightarrow \boxed{b=+6}$

در تابع با ضابطه $f(x)=(x+2)\sqrt{4x+1}$ آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه $[0,2]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=\frac{3}{4}$ چقدر بیش‌تر است؟

| ۰/۱۰ | ۰/۱۵ |
|---|---|
| ۰/۲۰ | ۰/۲۵ |

آهنگ لحظه‌ای (مشتق) $\Longrightarrow f'(x)=(1)\sqrt{4x+1}+\dfrac{4}{2\sqrt{4x+1}}(x+2)$

$$f'\left(\tfrac{3}{4}\right)=1\sqrt{4\left(\tfrac{3}{4}\right)+1}+\frac{4}{2\sqrt{4\left(\tfrac{3}{4}\right)+1}}\left(\tfrac{3}{4}+2\right)$$

$$f'\left(\tfrac{3}{4}\right)=2+\frac{2}{2}\left(\tfrac{11}{4}\right)=\boxed{\tfrac{19}{4}}$$

آهنگ متوسط $\rightarrow \dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}\Rightarrow \dfrac{12-2}{2}=\boxed{5}$

$f(2)=(2+2)\sqrt{4(2)+1}=12$

$f(0)=2\sqrt{1}=\boxed{2}$

$$5-\frac{19}{4}=\frac{20-19}{4}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

۰/۲۵

خط به معادله $y=3x-5$ در نقطه $x=2$ بر نمودار تابع $y=g(x)$ مماس است اگر $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{2x-2}=\dfrac{2}{3}$ باشد، $(f\circ g)'(2)$ کدام است؟

| | |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 3 | 4 |

$$(f\circ g)'(2)=g'(2)\cdot f'(g(2))$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{2x-2}=\frac{2}{3}\Rightarrow \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}_{f'(1)}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2}f'(1)=\frac{2}{3}\Rightarrow \boxed{f'(1)=\frac{4}{3}}$$

$$y=3x-5 \xrightarrow[\text{بر } g(x)]{\text{در } x=2 \text{ مماس}}$$

یعنی مشتق تابع $g(x)$ در $x=2$ برابر شیب $(3x-5)$

$$\boxed{g'(2)=3}$$

$$g'(2)\times f'(\overset{1}{g(2)})$$

$$3x-5\xrightarrow{x=2}3(2)-5=\boxed{1}$$

$$g(2)=1$$

$$3\times f'(1)=3\times\frac{4}{3}=\boxed{4}$$

---

ریاضی ۹۸ خارج:

در تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{2x+1}+\dfrac{1}{x+1}$ آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه $[0,4]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x=\dfrac{3}{2}$ چقدر کمتر است؟

| | |
|---|---|
| ۰/۳ | ۰/۴ |
| ۰/۵ | ۰/۶ |

$$f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}+\frac{-1}{(x+1)^2}\xrightarrow{x=\frac{3}{2}}\Rightarrow f'\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{2(2)}+\frac{-1}{\left(\frac{3}{2}+1\right)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\frac{25}{4}}=\frac{1}{2}-\frac{4}{25}=\frac{25-8}{50}=\frac{17}{50}=\boxed{0/34}$$

ص ۱۲

$$f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x+1}$$

$$f(4) = \sqrt{2(4)+1} + \frac{1}{4+1} = 3 + \frac{1}{5} = \boxed{\frac{16}{5}}$$

$$f(0) = \sqrt{1} + \frac{1}{0+1} = \boxed{2}$$

$$\frac{f(4) - f(0)}{4-0} = \frac{\frac{16}{5} - 2}{4} = \frac{\frac{16-10}{5}}{4} = \frac{6}{20} = \boxed{\frac{3}{10}}$$

$$0/34 - 0/3 = \boxed{0/4}$$

---

تجربی ۹۷

اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 4 & x \geq -2 \\ x^3 - x & x < -2 \end{cases}$ همواره مشتق پذیر باشد $f(1)$ کدام است؟

| | |
|---|---|
| $-3$ | $0$ |
| $2$ | $1$ |

$$\lim_{x \to (-2)^+} f(x) = \lim_{x \to (-2)^-} f(x) = f(-2)$$

$$a(-2)^2 + b(-2) + 4 = (-2)^3 - (-2) \Longrightarrow 4a - 2b + 4 = -6$$

$$4a - 2b = -10 \longrightarrow 2a - b = -5$$

$$f'_{(-2)^+}(x) = f'_{(-2)^-}(x) \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & x \geq -2 \\ 3x^2 - 1 & x < -2 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$2a(-2) + b = 3(-2)^2 - 1 \Longrightarrow -4a + b = 11$$

$$\begin{cases} 2a - \cancel{b} = -5 \\ -4a + \cancel{b} = 11 \end{cases}$$

$$-2a = 6 \longrightarrow a = -\frac{6}{2} = -3$$

$$+12 + b = 11$$

$$b = -1$$

ص ۱۳

$$f(1) = ax^2 + bx + 4 \xrightarrow[\substack{b=-1 \\ x=1}]{a=-3}$$

$$f(1) = -3(1)^2 - 1(1) + 4 = -4 + 4 = 0$$

تجربی ۹۷ خ

مشتق عبارت $\tan^3 2x$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

| | |
|---|---|
| ۳۶ | ۲۴ |
| ۷۲ | ۵۴ |

$$(\tan^3 2x)' = 3(2)(1+\tan^2 2x)(\tan^2 2x)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} 6\left(1+\tan^2\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(\tan^2\left(2\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 6\left(1+(\sqrt{3})^2\right)\left((\sqrt{3})^2\right) = 6(1+3)(3) = 72$$

ریاضی ۹۷

اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - [x] + |x|}$ باشد، $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟

| | |
|---|---|
| $\frac{\sqrt{5}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\sqrt{5}}{5}$ | $\frac{3}{2}$ |

مشتق راست در $x=1$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - [1^+] + \underset{1^+}{|x|}} = \sqrt{x^2 - 1 + x}$$

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2-1+x}} \xrightarrow{x=1} \frac{2(1)+1}{2\sqrt{1^2-1+1}} = \frac{3}{2}$$

ریاضی ۹۷ خ

الف) با فرض $f(x)=\dfrac{x^2}{|1-x|}[x]$ ، $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$ کدام است؟

مشتق ۳ از چپ

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $\frac{3}{2}$ | $\frac{3}{4}$ |

$$f(x)=\frac{x^2}{\underbrace{|1-x|}_{\ominus}}[3^-]\Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{-(1-x)}\times 2$$

$$f(x)=\frac{2x^2}{-1+x}\Longrightarrow f'(x)=\frac{(4x)(-1+x)-(1)(2x^2)}{(-1+x)^2}$$

$$f'(3)=\frac{4(3)(-1+3)-(2(3)^2)}{(-1+3)^2}=\frac{24-18}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

تجربی ۹۶

مشتق تابع $y=2\cos^2(\underbrace{\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4}}_{u})$ در نقطه $x=\frac{\pi}{6}$ کدام است؟

| | |
|---|---|
| $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{4}$ |

$$((u)^n)'=\underbrace{(2)(2)(-(-\tfrac{1}{4}))}_{1}\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4})\times\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4})$$

$$\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4}\xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}}\frac{\pi}{6}-\frac{\frac{\pi}{6}}{4}=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{24}=\frac{4\pi-\pi}{24}=\frac{3\pi}{24}=\frac{\pi}{8}$$

$$\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sin(2\times\frac{\pi}{8})=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

می‌دانیم $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin2\alpha$

ریاضی ۹۶ تجربی

اگر تابع $f$ در $x=4$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)+7}{x-4}=-\frac{3}{2}$ باشد آنگاه مشتق $\frac{f(2x)}{x}$ در $x=2$ کدام است؟

| | |
|---|---|
| $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} \xleftrightarrow{\text{مقایسه}} \lim_{x\to 4}\frac{f(x)+7}{x-4}$$

$$\Longrightarrow -f(4)=7 \Rightarrow \boxed{f(4)=-7}$$

$$\left(\frac{f(2x)}{x}\right)' \Longrightarrow \frac{2f'(2x)\times x-1\times f(2x)}{x^2} \xrightarrow{x=2}$$

می‌دانیم $(f(u))'=u'\times f'(u)$

$$\frac{2f'(4)\times 2-1\times f(4)}{4}=\frac{2(-\frac{3}{2})\times 2-1(-7)}{4}$$

$$\frac{-6+7}{4}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

---

ریاضی ۹۶ خ

اگر تابع $f$ در $x=-2$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-2+h)+3}{h}=\frac{1}{2}$ آنگاه مشتق $x^2f(x)$ در $x=-2$ کدام است؟

$f'(-2)=\frac{1}{2}$

| | |
|---|---|
| $10$ | $8$ |
| $14$ | $12$ |

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} \longrightarrow -f(-2)=3 \longrightarrow \boxed{f(-2)=-3}$$

ص ۱۶

$$(x^2 f(x))' = 2x\, f(x) + (1) f'(x) \times x^2$$

$$x=-2 \Longrightarrow -4 f(-2) + f'(-2)\times 4 \Rightarrow$$

$$-4(-3) + \frac{1}{2}\times 4 = 12+2 = \boxed{14}$$

---

تجربی ۹۵

در تابع با ضابطه $f(x)=\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^3$ حاصل $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ کدام است؟

| | |
|---|---|
| $-18$ | $-21$ |
| $15$ | $12$ |

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \to f'(2)$

$$\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^{3\,\prime} = 3\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)' \times \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^2 \xrightarrow{x=2}$$

$$= 3 \times \frac{\frac{(1)(-3)-(2)(2)}{(2x-3)^2}}{2\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}} \times \frac{x+2}{2x-3}$$

$$= 3\times\frac{\frac{-7}{(2(2)-3)^2}}{2\sqrt{\frac{4}{4-3}}}\times\frac{2+2}{2(2)-3} = 3\times\frac{-7}{2(2)}\times\frac{4}{1}$$

$$= \boxed{-21}$$

---

تجربی ۹۵ خ

در تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}$ حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ کدام است؟

| | |
|---|---|
| $\frac{5}{24}$ | $\frac{7}{48}$ |
| $\frac{7}{16}$ | $\frac{7}{24}$ |

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} \to f'(1)=?$

$$f'(x) = \frac{\frac{4(3)-5(1)}{(x+3)^2}}{2\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}} = \frac{\frac{7}{16}}{2\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{\frac{7}{16}}{2\times\frac{3}{2}} = \frac{7}{48}$$

ص ۱۷

تجربی ۹۵ خ

در تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{1+\cos x} & x>0\\[2mm] \sin 2x & x\leq 0\end{cases}$ مقدار $f'_-(0)-f'_+(0)=?$

| | |
|---|---|
| ۱ | ۱/۷۵ |
| ۱/۵ | ۱/۲۵ |

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{(\cos x)(1+\cos x)-(-\sin x)(\sin x)}{(1+\cos x)^2} & x>0^+\\[3mm] 2\cos 2x & x\leq 0^-\end{cases}$$

$$x=0 \Longrightarrow f'_+(0)=\frac{1(1+1)}{(1+1)^2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$x=0 \Longrightarrow f'_-(0)=2\cos 0=\boxed{2}$$

$$f'_-(0)-f'_+(0)=2-\frac{1}{2}=\boxed{1/5}$$

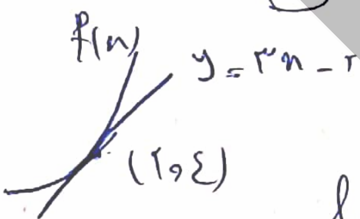
---

ریاضی ۹۵

خط به معادله $y=3x-2$ در نقطه $x=2$ بر منحنی به معادله $y=f(x)$ مماس است

حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-4f(x)}{x-2}$ کدام است؟

| | |
|---|---|
| ۶ | ۳ |
| ۱۵ | ۱۲ |




$$x=2 \longrightarrow y=3(2)-2=4 \qquad \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f^2(2)-4f(2)}{2-2}=\frac{4^2-4(4)}{2-2}=\frac{16-16}{0-0}=\frac{0}{0}$$

$$\Longrightarrow \text{Hop} \quad \lim_{x\to 2}\frac{2f'(x)f(x)-4f'(x)}{1}=2f'(2)f(2)-4f'(2)$$

$$=\boxed{12}$$

تابع $f$ در $x=2$ مشتق‌پذیر است اگر $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-9}{h}=\dfrac{3}{2}$ مشتق $g(x)=x\sqrt{f(x)}$ در $x=2$ کدام است؟

| ۲,۵ | ۳ |
|---|---|
| ۳,۵ | ۴ |

$$f'(2)=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

تشابه

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-9}{h}$$

$$-f(2)=-9 \Rightarrow \boxed{f(2)=9}$$

$$\left(x\sqrt{f(x)}\right)'=1\times\sqrt{f(x)}+\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\times x \xrightarrow{x=2}$$

$$1\times\sqrt{f(2)}+\frac{f'(2)}{\cancel{2}\sqrt{f(2)}}\times\cancel{2}=\sqrt{9}+\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{9}}=3+\frac{\frac{3}{2}}{3}$$

$$3+\frac{3}{6}=\boxed{3{,}5}$$

---

تجربی ۹۳

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$ از نقطه $x=4$ تا $x=12$ از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=4$ چقدر بیشتر است؟

در رابطه با ضابطه

| $\frac{7}{540}$ | $\frac{11}{540}$ |
|---|---|
| $\frac{7}{270}$ | $\frac{11}{270}$ |

$$f(x)=(2x+1)^{-\frac{1}{2}} \qquad (u^n)'=n.u'.u^{n-1}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}(2)(2x+1)^{-\frac{1}{2}-1} \Rightarrow f'(x)=-(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$x=4 \Longrightarrow f'(4)=-(2(4)+1)^{-\frac{3}{2}}=-(9)^{-\frac{3}{2}}$$

۱۹

$$f'(4) = -(3^2)^{-\frac{3}{2}} = -3^{-3} = \boxed{-\frac{1}{27}}$$

$$\text{آهنگ متوسط} \longrightarrow \frac{f(12)-f(4)}{12-4} = \frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}{8} = \frac{\frac{3-5}{15}}{8} = -\frac{2}{120} = -\frac{1}{60}$$

$$f(12) = (2(12)+1)^{-\frac{1}{2}} = 25^{-\frac{1}{2}} = (5^2)^{-\frac{1}{2}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

$$f(4) = (2(4)+1)^{-\frac{1}{2}} = 9^{-\frac{1}{2}} = (3^2)^{-\frac{1}{2}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{60} - \left(-\frac{1}{27}\right) = -\frac{1}{60} + \frac{1}{27} = \frac{-27+60}{60\times 27} = \frac{\cancel{33}^{\,11}}{60\times \cancel{27}_{\,9}}$$

$$= \boxed{\frac{11}{540}}$$

---

تجربی ۹۳ خ

در تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{x}$ آهنگ تغییر متوسط تابع از نقطه $x=4$ تا $x=6{,}25$ از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطه $x=4$ چقدر کمتر است؟

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{18}$ |
| $\frac{5}{72}$ | $\frac{1}{12}$ |

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x=4} \frac{1}{2\sqrt{4}} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{f(6{,}25)-f(4)}{6{,}25-4} = \frac{2{,}5-2}{6{,}25-4} = \frac{\frac{1}{2}}{2{,}25} = \frac{5\times 10^{-1}}{225\times 10^{-2}} = \frac{2}{9}$$

$$f(6{,}25) = \sqrt{6{,}25} = \sqrt{\frac{625}{100}} = \frac{25}{10} = 2{,}5$$

$$f(4) = \sqrt{4} = 2$$

$$\frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{9-8}{36} = \boxed{\frac{1}{36}}$$

ص ۲۰

تجربی ۹۳ خ

مشتق $y=\sin^3\sqrt{2x}$ به ازای $x=\frac{\pi^2}{18}$ کدام است؟

| | |
|---|---|
| $\frac{9}{8\pi}$ | $\frac{9}{4\pi}$ |
| $\frac{27}{8\pi}$ | $\frac{27}{4\pi}$ |

$$y' = 3 \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2x}} \cos\sqrt{2x} \times \sin^2\sqrt{2x}$$

$$y' = 3 \times \frac{1}{\sqrt{\frac{\cancel{2}\pi^2}{\cancel{18}\,9}}} \cos\sqrt{\frac{2\pi^2}{18}} \times \sin^2\sqrt{\frac{2\times\pi^2}{18}}$$

$$y' = 3 \times \frac{1}{\frac{\pi}{3}} \cos\sqrt{\frac{\pi^2}{9}} \times \sin^2\sqrt{\frac{\pi^2}{9}}$$

$$y' = \frac{9}{\pi} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{\pi} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \boxed{\frac{27}{8\pi}}$$

---

ریاضی ۹۳

مشتق راست تابع با ضابطه $f(x)=([x]-|x|)\sqrt[3]{9x}$ در نقطه $x=-3$ کدام است؟

| | |
|---|---|
| $-\frac{16}{3}$ | $-5$ |
| $-4$ | $\frac{7}{3}$ |

$[(-3)^+] = -3 \qquad f(x) = (-3+x)\sqrt[3]{9x} \longrightarrow$

$|x| = -x$

$\downarrow$

$-3$

$$f'(x) = (1)\sqrt[3]{9x} + \frac{9}{3\sqrt[3]{(9x)^2}} \xrightarrow{x=-3}$$

$$f'(-3) = \sqrt[3]{-27} + \frac{9}{3\sqrt[3]{(-27)^2}}(-3+x) = -3 + \frac{9}{3\sqrt[3]{3^6}}(-6) = -3 + \frac{3}{9}(-6)$$

$$-3 + \frac{18}{9} = -3 - 2 = \boxed{-5}$$

ص ۲۱

ریاضی ۹۲

اگر $f(x)=(x^2-x-2)\sqrt[3]{x^2-7x}$ باشد حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ کدام است؟

| | |
|---|---|
| $-3$ | $-6$ |
| $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{3}{4}$ |

$\downarrow$

$f'(-1)$ مشتق در نقطه ۱-

$$f(x)=(x-2)(x+1)\sqrt[3]{x^2-7x}$$

چون در تابع داده شده عامل صفرشونده وجود دارد یعنی $x=-1$ تابع $f(x)$ صفر شود

فقط از عامل صفرشونده مشتق می‌گیریم و در بقیه جاها بجای $x=-1$ قرار می‌دهیم.

$$f'(x)=(-1-2)(1)\sqrt[3]{(-1)^2-7(-1)}=-3\sqrt[3]{8}=(-3)(2)=\boxed{-6}$$

روش دوم: می‌توانیم از ضرب $(f\times g)'$ استفاده کنیم که طولانی‌تر می‌شود.

نکته: هرگاه به هنگام مشتق گرفتن از یک تابع ضربی عاملی وجود داشت که بجای $x$ آن $x$ داده شده آن عبارت صفر شد کافی است فقط از آن عامل مشتق بگیریم و در بقیه فقط عدد گذاری انجام دهیم.

---

ریاضی ۹۲

تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}ax^3+bx & x<1\\ 2\sqrt{4x-3} & x\geq 1\end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است

$b$ کدام است؟

| | |
|---|---|
| $\frac{3}{2}$ | 1 |
| $\frac{1}{2}$ | 2 |

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=f(1)$$

$$2\sqrt{4-3}=a+b\Longrightarrow\boxed{a+b=2}$$

$$f'(1^+)=f'(1^-)\Longrightarrow \cancel{2}\frac{4}{\cancel{2}\sqrt{4x-3}}=3ax^2+b\xrightarrow{x=1}$$

$$4=3a+b$$

ص ۲۳

$$\boxed{-}\begin{cases} a+b=2 \\ 3a+b=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a-\cancel{b}=-2 \\ 3a+\cancel{b}=4 \end{cases}$$

$$2a=2 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

$$a+b=2 \xrightarrow{a=1} \boxed{b=1}$$

ریاضی ۹۲

اگر $f(x)=\dfrac{x^3-2}{1+x^3}$ و $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$ حاصل $(fog)'(x)$ کدام است؟

| | |
|---|---|
| $\dfrac{3}{x^2}$ | $\dfrac{3}{x}$ |
| $\dfrac{x-3}{x^2}$ | $\dfrac{1}{3x}$ |

$$\underbrace{f'(g(x))\cdot g'(x)}$$

$$(fog)'(x)=g'(x)\cdot f'(g(x))$$

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{(\sqrt[3]{x-1})^3-2}{1+(\sqrt[3]{x-1})^3}=\frac{x-3}{x}$$

$$(fog(x))'=\left(\frac{x-3}{x}\right)'=\frac{x-(x-3)}{x^2}=\frac{x-x+3}{x^2}=\frac{3}{x^2}$$

ریاضی ۹۲ خ

در تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x-\dfrac{1}{x} & x\geq 1 \\ x^2+ax+b & x<1 \end{cases}$ مقدار $f'(1)$ موجود است $f(1-\sqrt{2})$ کدام است؟

| | |
|---|---|
| $2-\sqrt{2}$ | $3-\sqrt{2}$ |
| $3-2\sqrt{2}$ | $2-2\sqrt{2}$ |

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$$

$$1-\cancel{\frac{1}{1}}=1+a+b \Rightarrow \boxed{a+b=-1}$$

$$f'_{1^+}(x)=f'_{1^-}(x) \Rightarrow 1+\frac{1}{x^2}=2x+a \xrightarrow{x=1} 2+a=1+1$$

$$2+a=2 \rightarrow \boxed{a=0}$$

$$\Rightarrow a+b=-1 \xrightarrow{a=0} \boxed{b=-1}$$

ص ۲۳

$1-\sqrt{2} \simeq 1-1/4 \simeq -0/4 \longrightarrow x<1$

$f(x) = x^2+ax+b \xrightarrow[b=-1]{a=0}$

$x = 1-\sqrt{2}$

$f(1-\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2})^2 + 0 + (-1) = 1+2-2\sqrt{2} -1 = \boxed{2-2\sqrt{2}}$

---

ریاضی ۹۲ خ

الف $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ , $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ حاصل

$\underbrace{f'(x) \cdot g'(f(x))}_{\downarrow} = ?$

| -1 | 1 |
|---|---|
| $x$ | $\frac{1}{2}x$ |

$(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x))$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = \dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1-x^2}}} = \dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{\dfrac{1-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}}{1-x^2}}}$

$g(f(x)) = \dfrac{x}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}} \times \dfrac{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}{1} = x$

$g \circ f(x) = x \longrightarrow (g \circ f)' = x' = \boxed{1}$

---

ریاضی ۹۱ خ

اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 1+a\cos \pi x & x>1 \\ bx^2+x & x\leq 1 \end{cases}$ بر روی R مشتق‌پذیر باشند

مقدار a کدام است؟

| -1 | 1 |
|---|---|
| $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$

$b+1 = 1+a\overset{-1}{\cos\pi} \Longrightarrow 1-a = b+1 \Longrightarrow -a=b$

$f'_{1^+}(x) = f'_{1^-}(x) \Rightarrow -a\pi \sin \pi x = 2bx+1 \xrightarrow{x=1}$ $\boxed{a=-b}$

$-a\pi \underbrace{\sin\pi}_{0} = 2b+1 \Rightarrow 2b+1=0 \longrightarrow b=-\frac{1}{2} \longrightarrow a=\frac{1}{2}$

تجربی ۹۹: تابع با ضابطه

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{5-2x} & x\leq -2\\ -\frac{1}{2}x^2+bx+c & x>-2\end{cases}$$

در $x=-2$ مشتق‌پذیر است. مقدار c کدام است؟

$f(-2)$ و $-2^-$ ، $-2^+$

$\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$

$-\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{3}$

چون مشتق‌پذیر است لذا حتماً پیوسته است.

$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=f(-2)$$

$$-\frac{1}{2}(-2)^2+(-2)(b)+c=\sqrt{5-2(-2)}$$

$$-2-2b+c=\sqrt{9}\Rightarrow \boxed{-2b+c=5}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{-2}{2\sqrt{5-2x}} & x<-2\\ -x+b & x>-2\end{cases}$$

مشتق چپ = مشتق راست

$$\Rightarrow \frac{-2}{2\sqrt{5-2(-2)}}=-(-2)+b\Longrightarrow \frac{-2}{6}=2+b\Longrightarrow$$

$$b=-\frac{1}{3}-2\Rightarrow b=-\frac{7}{3}$$

$$-2b+c=5\Longrightarrow -2\left(-\frac{7}{3}\right)+c=5\Longrightarrow c=5-\frac{14}{3}$$

$$\boxed{c=\frac{1}{3}}$$

ص ۱۳

تجربی ۹۹ : مشتق تابع با ضابطه $f(x)=\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2+2x}}{x^2-x}\right)^3$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

| | |
|---|---|
| $-\frac{5}{4}$ | $-\frac{3}{4}$ |
| $-\frac{15}{4}$ | $-\frac{5}{2}$ |

$$f(x)=\left(\frac{x^2+2x}{(x^2-x)^3}\right)'$$

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x^2-x)^3-(3)(2x-1)(x^2-x)^2(x^2+2x)}{(x^2-x)^6}$$

$$f'(x)=\frac{(2(2)+2)(2^2-2)^3-(3)(2(2)-1)(2^2-2)^2(2^2+4)}{(2^2-2)^6}$$

$$=\frac{(6)(8)-(3)(3)(4)8}{64}=\frac{48-288}{64}=-\frac{240}{64}$$

$$=-\frac{30}{8}=-\frac{15}{4}$$

تجربی ۹۹ خ : مقدار مشتق تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt[3]{\left(\dfrac{2x-x^2}{3x+5}\right)^2}$ در نقطه $x=-2$ کدام است؟

| | |
|---|---|
| $4$ | $3$ |
| $6$ | $5$ |

$$f(x)=\left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{(2-2x)(3x+5)-(3)(2x-x^2)}{(3x+5)^2}\right)\left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'(-2)=\frac{2}{3}\left(\frac{(6)(-1)-(3\times-8)}{(-1)^2}\right)\left(\frac{-8}{-1}\right)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\times18\times\frac{1}{2}$$

$$=\boxed{6}$$

تجربی ۹۹ خ

خط مماس بر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ , $g(x)=ax^2+bx$ در نقطه $x=2$ مشترک اند مقدار $b$ کدام است؟

خط مماس مشترک یعنی $\Rightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f'(x)=g'(x) \end{cases}$

$$\Rightarrow f(2)=g(2) \Rightarrow \frac{2+2}{2-1}=4a+2b$$

$$4a+2b=4 \xrightarrow{\div 2} 2a+b=2$$

$$f'(x)=\frac{(1)(-1)-2(1)}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(2)=\frac{-3}{(2-1)^2}=\boxed{-3}$$

$$g'(x)=2ax+b \xrightarrow{x=2} \boxed{g'(2)=4a+b}$$

$$\ominus\begin{cases} 4a+b=-3 \\ 2a+b=2 \end{cases} \quad \begin{cases} -4a-\cancel{b}=3 \\ 2a+\cancel{b}=2 \end{cases}$$

$$-2a=5 \Rightarrow \boxed{a=-\frac{5}{2}}$$

$$2\left(-\frac{5}{2}\right)+b=2 \longrightarrow -5+b=2$$

$$\boxed{b=7}$$

ریاضی ۹۹

اگر $f$ یک تابع مشتق‌پذیر و $g(x)=f(\sqrt{1+\tan^2 x})$ و $g'(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ مقدار $f'(2)$ کدام است؟

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $-\frac{1}{2}$ | $1$ |

$$g'(x)=\frac{\cancel{2}(1+\tan^2 x)(\tan x)}{\cancel{2}\sqrt{1+\tan^2 x}}\,f'\left(\sqrt{1+\tan^2 x}\right)$$

$$\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

$$g'(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{(1+(\sqrt{3})^2)(\sqrt{3})}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}}\,f'\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}$$

$$\Rightarrow\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{2}}=\frac{4\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{2}}f'(2)\Rightarrow\boxed{f'(2)=\frac{1}{4}}$$

---

ریاضی ۹۹: آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sqrt{21-x^2+4x}$ در بازه $[5,6]$ برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع با کدام مقدار $x$ است؟

| | |
|---|---|
| $3+2\sqrt{2}$ | $4+\sqrt{2}$ |
| $2+\frac{5}{2}\sqrt{2}$ | $2+\frac{3}{2}\sqrt{2}$ |

$$\frac{f(6)-f(5)}{6-5}=\frac{-2x+4}{2\sqrt{21-x^2+4x}}=\frac{\cancel{2}(-x+2)}{\cancel{2}\sqrt{21-x^2+4x}}$$

$$f(6)=\sqrt{21-36+24}=\sqrt{9}=3$$

$$f(5)=\sqrt{21-25+20}=\sqrt{16}=4\quad\Rightarrow\frac{3-4}{6-5}=\boxed{-1}$$

$$\Rightarrow\frac{-x+2}{\sqrt{21-x^2+4x}}=-1\xrightarrow{\text{توان ۲}}\frac{x^2-4x+4}{21-x^2+4x}=1\Rightarrow 2x^2-8x-17=0$$

$$\xrightarrow{\Delta}\frac{8\pm10\sqrt{2}}{4}=2\pm\frac{5}{2}\sqrt{2}$$

ریاضی ۹۹: خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\dfrac{5x-4}{\sqrt{x}}$ در نقطه $x=4$ واقع بر آن، محور $y$ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ ($x=0$)

| | |
|---|---|
| ۳ | ② |
| $-4$ | $-1$ |

[۴ ۸]

$$f(4)=\frac{5(4)-4}{\sqrt{4}}=\frac{16}{2}=8$$

$$f'(x)=\frac{5\sqrt{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(5x-4)}{(\sqrt{x})^2}\Rightarrow f'(4)=\frac{10-4}{4}=\frac{3}{2}$$

$$y-y_0=f'(x)(x-x_0)\Longrightarrow y-8=\frac{3}{2}(x-4)\xrightarrow{x=0}$$

$$y=\frac{3}{2}(-4)+8=\boxed{2}$$

---

ریاضی ۹۹ خ: اگر $f$ یک تابع مشتق‌پذیر و $g(x)=f\left(\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)$، $g'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ مقدار $f'\left(\frac{1}{3}\right)=?$

| | |
|---|---|
| $-\frac{3}{4}$ | $-\frac{2}{3}$ |
| $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{4}{3}$ |

$$g'(x)=\frac{(-\cos x)(1+\sin x)-(\cos x)(1-\sin x)}{(1+\sin x)^2}f'\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)$$

$$\frac{-\cos x-\cancel{\cos x\sin x}-\cos x+\cancel{\cos x\sin x}}{(1+\sin x)^2}f'\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)$$

$$g'(x)=\frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2}f'\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)\xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}}$$

$$\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{3}=\frac{-\cancel{\sqrt{3}}}{\frac{9}{4}}f'\left(\frac{1}{3}\right)\Longrightarrow f'\left(\frac{1}{3}\right)=\boxed{-\frac{3}{4}}$$

ص ۲۹

ریاضی خارج ۹۹: فرض کنید نمودارهای ۲ تابع $y=x\sqrt{x}$ و $y=x^2+ax+b$ در یک نقطه مشترک بر یک خط مماس باشند. اگر طول نقطه مشترک ۴ باشد، مقدار b کدام است؟

| | |
|---|---|
| ۹ | ۸ |
| ۱۲ | ۱۰ |

در $x=4$ مقدار دو تابع و مشتق دو تابع باهم برابر است.

$$4\sqrt{4}=4^2+4a+b$$

$$8=16+4a+b \Longrightarrow \boxed{4a+b=-8}$$

$$y=x\sqrt{x} \qquad\qquad y=x^2+ax+b$$

$$\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\times x = 2x+a \xrightarrow{x=4}$$

$$2+\frac{1}{2(2)}\times 4 = 2(4)+a \Longrightarrow a=-5$$

$$4a+b=-8 \xrightarrow{a=-5} -20+b=-8 \Longrightarrow \boxed{b=12}$$

ریاضی ۹۹ خ: در تابع با ضابطه

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+6x} & 0<x<4 \\ \left[\frac{x}{4}\right](x^2-9x) & 4\le x<8\end{cases}$$

مقدار $f'(2)-f'(5)$ کدام است؟

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{3}{2}$ | $\frac{3}{4}$ |

$$\sqrt{x^2+6x} \xrightarrow{\ '\ } \frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x}} = \frac{\cancel{2}(x+3)}{\cancel{2}\sqrt{x^2+6x}} \xrightarrow{x=2} \frac{5}{4}$$

$$\left[\frac{x}{4}\right](x^2-9x) \xrightarrow[\text{چون } 4<x<8]{\left[\frac{x}{4}\right]=1} (x^2-9x)' = 2x-9 \xrightarrow{x=5}$$

$$2(5)-9=1$$

$$f'(2)-f'(5)=\frac{5}{4}-1=\boxed{\frac{1}{4}}$$

ص ۳۰

$\boxed{\text{تجربی ۱۴۰۰}}$ :

فرض کنید $f(x)=\left(x\left[x^2+\frac{1}{2}\right]\right)^2+1$ و $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ مقدار مشتق تابع $fog$ در $x=\frac{3}{\sqrt{8}}$ چند برابر $(-128\sqrt{2})$ است؟

| | |
|---|---|
| ۲ | ۱ |
| $-4$ | ۴ |

$$[fog(x)]'=[f(g(x))]'=g'(x)\times f'(g(x))$$

$$=g'\left(\frac{3}{\sqrt8}\right)\times f'\left(g\left(\frac{3}{\sqrt8}\right)\right)$$

$$g\left(\frac{3}{\sqrt8}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{3}{\sqrt8}\right)^2-1}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{8}-1}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}}=\boxed{2}$$

$$g(x)=(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}\Rightarrow g'(x)=-\frac{1}{3}(2x)(x^2-1)^{-\frac{4}{3}}$$

$$g'\left(\frac{3}{\sqrt8}\right)=-\frac{1}{3}\left(\frac{2(3)}{\sqrt8}\right)\left(\left(\frac{3}{\sqrt8}\right)^2-1\right)^{-\frac{4}{3}}$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{6}{\sqrt8}\right)\left(\frac{9}{8}-1\right)^{-\frac{4}{3}}=\frac{-6}{6\sqrt2}\left(2^{-3}\right)^{-\frac{4}{3}}$$

$$-\frac{16}{\sqrt2}=-\frac{16}{\sqrt2}\times\frac{\sqrt2}{\sqrt2}=\boxed{-8\sqrt2}$$

$$(-8\sqrt2)(f'(2))=-8\sqrt2\times 64=\boxed{-512\sqrt2}$$

$$\frac{-512\sqrt2}{-128\sqrt2}=\boxed{4}$$

$$x^2+\frac{1}{2}\longrightarrow 2^2+\frac{1}{2}=4.5\longrightarrow [4.5]=4\longrightarrow \boxed{16x^2+1}$$

$$f'(x)=32x\longrightarrow \boxed{f'(2)=64}$$

تجربی ۱۴۰۰

فرض کنید: $g(x)=ax^2+bx+c$ و $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\geq k \\ g'(x) & x<k \end{cases}$ و $a\neq 0$ باشد. اگر f یک تابع مشتق‌پذیر باشد، حداکثر مقدار $k$ به شرط $b+c=a$ کدام است؟

| | |
|---|---|
| $1$ | $3$ |
| $4$ | $\frac{3}{4}$ |

$\hookrightarrow c=a-b$

f مشتق‌پذیر است لذا پیوسته هم هست $\Longrightarrow g(x)=g'(x)$

$$ax^2+bx+c=2ax+b$$

$$\Longrightarrow ax^2+(b-2a)x+c-b=0$$

$$c \to a-b$$

$$ax^2+(b-2a)x+a-b-b=0$$

$$ax^2+(b-2a)x+a-2b=0$$

$$\Delta=0 \Longrightarrow (b-2a)^2-(4(a)(a-2b))=0$$

$$b^2-4ab+4a^2-4a^2+8ab=0$$

$$b^2+4ab=0$$

$$b(b+4a)=0 \to b=0,\quad b=-4a$$

$$-\frac{b}{2a} \longrightarrow -\frac{(b-2a)}{2a} \xrightarrow{b=0} \boxed{1}$$

$$-\frac{(b-2a)}{2a} \xrightarrow{b=-4a} \boxed{3}$$

$$\boxed{k_{max}=3}$$

روش دوم:

در $x=k$ پیوسته است $\Longrightarrow$ $\boxed{ak^2+bk+c=2ak+b}$

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & x\geq k \\ 2ax+b & x<k \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax+b & x>k \\ 2a & x<k \end{cases} \xRightarrow{\text{مشتق پذیری}} \boxed{2ak+b=2a}$$

$$\begin{cases} ak^2+bk+c=2a \\ 2a=2ak+b \longrightarrow \boxed{b=2a-2ak} \longrightarrow c=a-b \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =2ak-a \end{cases}$$

$$ak^2+(2a-2ak)k+2ak-a=2a$$

$$ak^2-4ak+3a=0 \xrightarrow{a\neq 0} \qquad a(\underbrace{k^2-4k+3}_{=0})=0$$

$$k^2-4k+3=0 \longrightarrow \boxed{k=1,\ 3}$$

---

تجربی ۱۴۰۰ خ | فرض کنید $f(x)=(x[x])^3$ و $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ مقدار مشتق چپ تابع $f\circ g$ در $x=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ چند برابر است؟ $(-48\sqrt{5})$

$\dfrac{2}{8}\Big|\dfrac{1}{4}$

$$(f\circ g(x))'=g'(x)\cdot f'(g(x))$$

$$g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}-۱}}=(x^{۲}-۱)^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$g'(x)=-\frac{۱}{۲}(۲x)(x^{۲}-۱)^{-\frac{۳}{۲}}$$

$$g'\left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}\right)=-\frac{۱}{۲}\left(\cancel{۲}\frac{\sqrt{۵}}{\cancel{۲}}\right)\left(\left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}\right)^{۲}-۱\right)^{-\frac{۳}{۲}}$$

$$=-\frac{۱}{۲}\sqrt{۵}\times\left(\frac{۵}{۴}-۱\right)^{-\frac{۳}{۲}}=-\frac{\sqrt{۵}}{۲}\left(\frac{۱}{۴}\right)^{-\frac{۳}{۲}}$$

$$=-\left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}\right)(۲^{-۲})^{-\frac{۳}{۲}}=-\frac{\sqrt{۵}}{۲}\times ۸=-۴\sqrt{۵}$$

$$f'\left(g\left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}\right)\right)=f'\left(\frac{۱}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}\right)^{۲}-۱}}\right)=f'\left(\frac{۱}{\sqrt{\frac{۵}{۴}-۱}}\right)=f'(۲^{+})$$

$$\downarrow$$

$$\frac{۱}{\sqrt{\left(\frac{۱}{۴}\right)^{-}}}=۲^{+}$$

$$(x[x])^{۳}=(x[۲^{+}])^{۳}=(۲x)^{۳}=۸x^{۳}$$

$$f'(x)=۲۴x^{۲}\xrightarrow{x=۲}=۲۴\times ۲^{۲}=\boxed{۹۶}$$

$$f'\left(g\left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}\right)\right)=۹۶\times -۴\sqrt{۵}=-۳۸۴\sqrt{۵}$$

$$\frac{-۳۸۴\sqrt{۵}}{-۴۸\sqrt{۵}}=\boxed{۸}$$

تجربی ۱۴۰۰ خ :

فرض کنید $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\leq 2 \\ g'(x) & x>2 \end{cases}$ اگر $g(x)=ax^2+5x+b$ مشتق‌پذیر باشد مقدار $a+b$ کدام است؟

| | |
|---|---|
| $-\frac{5}{2}$ | $\frac{5}{2}$ |
| $-\frac{15}{2}$ | $\frac{15}{2}$ |

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+5x+b & x\leq 2 \\ 2ax+5 & x>2 \end{cases}$$

شرط پیوستگی $\Longrightarrow a(2)^2+5(2)+b=2a(2)+5$

$$4a+10+b=4a+5 \longrightarrow \boxed{b=-5}$$

شرط مشتق‌پذیری $\Longrightarrow 2ax+5=2a \xrightarrow{x=2} 4a+5=2a$

$$2a=-5 \Longrightarrow \boxed{a=-\frac{5}{2}}$$

$$a+b=-\frac{5}{2}-5=\boxed{-\frac{15}{2}}$$

---

تجربی ۱۴۰۰ خ : تابع با ضابطه $f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ را در نظر بگیرید

شیب خط مماس بر منحنی $f^{-1}(x)$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن کدام است؟

| | |
|---|---|
| ۱۲ | ۸ |
| ۱۲ | ۸ |

نکته : $(f^{-1}(2))'=\frac{1}{f'(9)}$

$$(f^{-1}(x))'=\frac{1}{f'(y)}$$

$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=2 \longrightarrow \boxed{x=9}$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{(\frac{1}{2\sqrt{x}})(\sqrt{x}-1)-\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\cancel{\sqrt{x}}-1-\cancel{\sqrt{x}}-1)}{(\sqrt{x}-1)^2}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2} \xrightarrow{x=9}$$

$$f'(9)=\frac{-\frac{1}{3}}{(3-1)^2}=-\frac{1}{12}$$

$$(f^{-1}(2))'=\frac{1}{-\frac{1}{12}}=-12 \longrightarrow$$ جواب در گزینه‌ها نبود

---

تجربی ۱۴۰۱: معادله خط مماس بر نمودار $y=\frac{x^2+mx+1}{x+3}$ در نقطه‌ای به طول واحد بر روی نمودار به صورت $4y-3x=n$ است مقدار $m+n$ چقدر است؟

| ۳ | ۲ |
|---|---|
| -۴ | -۲ |

$$4y-3x=n \longrightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{n}{4}$$

$$f'(1)=\frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{(2x+m)(x+3)-(1)(x^2+mx+1)}{(x+3)^2}$$

$$f'(1)=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3}{4}=\frac{(2+m)(4)-(1+m+1)}{(1+3)^2}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{8+4m-m-2}{16} \longrightarrow 12=3m+6 \longrightarrow \boxed{m=2}$$

$$x=1 \longrightarrow f(1)=\frac{1+2+1}{1+3}=1 \qquad \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow y-1=\frac{3}{4}(x-1)$$

$$y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4} \longrightarrow \boxed{n=1}$$

تجربی ۱۴۰۱ خ : اگر $y=2x+b$ بر نمودار $y=\frac{x+a}{ax+1}$ در نقطه‌ای به طول واحد مماس باشد مقدار $a-b$ کدام است؟

| | |
|---|---|
| ۰ | ۱ |
| $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

$$y'=2 \Rightarrow \left(\frac{x+a}{ax+1}\right)'_{x=1}=2$$

$$\Rightarrow \frac{1-a^2}{(ax+1)^2} \xrightarrow{x=1} \frac{1-a^2}{(a+1)^2}=2$$

$$\Rightarrow 2a^2+4a+2=1-a^2 \Rightarrow 3a^2+4a+1=0$$

$$\boxed{\begin{matrix} a=-1 \\ a=-\frac{1}{3}\end{matrix}} \begin{matrix} \rightarrow \times \\ \rightarrow \checkmark \end{matrix}$$

چون مخرج را صفر می‌کند

$$\begin{cases} y=2x+b \\ y=\frac{x-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}x+1}\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} f_1(1)=f_2(1) \\ f'_1(1)=f'_2(1)\end{matrix}$$

$$\Rightarrow 2+b=\frac{1-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}+1} \Rightarrow 2+b=\frac{3-1}{-1+3}$$

$$2+b=\frac{2}{2} \rightarrow \boxed{b=-1} \quad a-b=-\frac{1}{3}-(-1)=\boxed{\frac{2}{3}}$$

ریاضی ۱۴۰۱

در نقطه تلاقی منحنی های $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\cos x$ و $g(x)=\frac{3}{2}\sin x$ در بازه $[0,\pi]$ خط مماسی بر منحنی $f(x)$ رسم می‌شود این خط محور $x$ ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

| | |
|---|---|
| $\frac{\pi}{4}-1$ | $\frac{\pi}{4}-3$ |
| $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{8}$ | $\frac{\pi}{4}+\frac{3}{8}$ |

$$f(x)=g(x)$$

$$\sin x+\frac{1}{2}\cos x=\frac{3}{2}\sin x$$

$$\frac{1}{2}\cos x=\frac{3}{2}\sin x-\sin x$$

$$\frac{1}{2}\cos x=\frac{1}{2}\sin x\Longrightarrow \cos x=\sin x$$

$$\Longrightarrow x=\frac{\pi}{4}\longrightarrow y=\frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{y=\frac{3\sqrt{2}}{4}}$$

$$f'(x)=\cos x-\frac{1}{2}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$y-\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\xrightarrow[\text{محور } x \text{ قطع شود}]{y=0}$$

$$-\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{\sqrt{2}\pi}{16}\xrightarrow{\times\frac{4}{\sqrt{2}}}$$

$$-3=x-\frac{\pi}{4}\longrightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{4}-3}$$

۳۸

ریاضی ۱۴۰۱ : تابع $f$ مشتق‌پذیر و با دوره تناوب ۵ است اگر $f'(-1)=\frac{3}{2}$

و $g(x)=f(x+1)+f(3x+10)$ باشد. حاصل $g'(-2)$ کدام است؟

| | |
|---|---|
| $\frac{7}{2}$ | $3$ |
| $\frac{13}{2}$ | $6$ |

$$\boxed{f(x+T)=f(x)}$$

$$f(x+5)=f(x) \xrightarrow{\ '\ } f'(x+5)=f'(x)$$

$$\xrightarrow{x=-1} f'(4)=f'(-1)=\frac{3}{2}$$

$$g'(x)=f'(x+1)+3f'(3x+10) \xrightarrow{x=-2}$$

$$g'(-2)=f'(-1)+3f'(4)$$

$$g'(-2)=\frac{3}{2}+3\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}+\frac{9}{2}=\boxed{6}$$

---

ریاضی ۱۴۰۱ : اگر $f(x)=(x-4)\sqrt[3]{x+3}$ باشد. حاصل

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^2(5-h)-3f(5-h)+2}{h(5-h)}$$ کدام است؟

| | |
|---|---|
| $-\frac{5}{12}$ | $\frac{5}{6}$ |
| $-\frac{13}{15}$ | $\frac{13}{20}$ |

$$f(5)=(5-4)\sqrt[3]{5+3}=\boxed{2}$$

$$f'(x)=(1)\sqrt[3]{x+3}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}}(x-4)$$

$$f'(5)=2+\frac{1}{12}(1)=\frac{25}{12}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^2(5)-3f(5)+2}{0}=\frac{0}{0}\Longrightarrow \text{Hop}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-2f(5-h)f'(5-h)+3f'(5-h)}{5-2h}$$

$$=\frac{-2f(5)f'(5)+3f'(5)}{5}=\frac{-\frac{25}{12}}{5}=\boxed{-\frac{5}{12}}$$

---

ریاضی ۱۴۰۱ خ : اگر تابع $f$ مشتق‌پذیر و $g(x)=f(\tan^2x+\sqrt{2}\cos x)$ ، $g'(\frac{\pi}{4})=\sqrt{3}$ باشد. مقدار $f'(2)$ چقدر است؟

| | |
|---|---|
| $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ |

$$g'(x)=\left(2(1+\tan^2x)(\tan x)-\sqrt{2}\sin x\right)\cdot f'(\tan^2x+\sqrt{2}\cos x)$$

$x=\frac{\pi}{4}\longrightarrow$ جواب $=\sqrt{3}$

$$\sqrt{3}=\left(2(1+\tan^2\tfrac{\pi}{4})(\tan\tfrac{\pi}{4})-\sqrt{2}\sin\tfrac{\pi}{4}\right)\cdot f'\left((\tan\tfrac{\pi}{4})^2+\sqrt{2}\cos\tfrac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow\sqrt{3}=\left(2(1+1)(1)-\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot f'(2)$$

$$\sqrt{3}=(2(2)-1)\,f'(2)\Rightarrow f'(2)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

---

ریاضی ۱۴۰۱ خ : دربازه $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sin x\cos x$ چند برابر آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sin^4x-\cos^4x$ است؟

| | |
|---|---|
| $1$ | $-1$ |
| $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |

ص ۴۰

آهنگ متوسط $\Rightarrow \dfrac{f(\frac{\pi}{2})-f(\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}} = \dfrac{-1-0}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}} = \dfrac{-1}{\frac{\pi}{4}} = \boxed{-\dfrac{4}{\pi}}$

$f(\frac{\pi}{2}) = \overset{1}{\cancel{\sin\frac{\pi}{2}}}\ \cos\frac{2\pi}{2} = -1$

$f(\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4}\ \cos\frac{2\pi}{4} = 0$

$y = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\overset{1}{\cancel{\sin^2 x + \cos^2 x}})$

$= \sin^2 x - \cos^2 x = \boxed{-\cos 2x}$

$f(\frac{\pi}{2}) = -\cos 2\times\frac{\pi}{2} = 1$

$f(\frac{\pi}{4}) = -\cos 2\times\frac{\pi}{4} = 0$ $\Longrightarrow$ آهنگ متوسط تابع (و) $= \dfrac{1-0}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}} = \boxed{\dfrac{4}{\pi}}$

$\dfrac{-\frac{4}{\pi}}{\frac{4}{\pi}} = \boxed{-1}$